



十二年國民基本教育課程綱要  
國民中小學暨普通型高級中等學校

# 數學領域

• • • •

# 課程手冊

初稿

中華民國一〇六年三月 (更新第三版)

※ 本文件為初步稿件，內容僅提供參考，研發小組將持續調整更新，後續以最終定稿為準

# 目錄

<b>壹、發展沿革與特色</b> .....	2
一、數學領域課程綱要的發展沿革.....	2
二、研修目標與特色.....	3
三、研修原則.....	5
四、研修過程.....	6
五、新舊課綱比較.....	6
<b>貳、課程架構</b> .....	7
一、課程架構規劃說明.....	7
二、高中加深加廣選學、升學與職涯進路關係.....	8
<b>參、核心素養與學習重點的呼應說明</b> .....	13
一、國民小學教育階段.....	13
二、國民中學教育階段.....	14
三、普通型高級中等學校教育階段.....	16
<b>肆、學習重點解析</b> .....	18
一、國民小學教育階段.....	18
二、國民中學教育階段.....	53
三、普通型高級中等學校教育階段.....	79
<b>伍、素養導向教材編寫之原則-雙向細目表及說明</b> .....	117
一、素養導向教材編寫原則.....	117
二、國民小學教育階段.....	118
三、國民中學教育階段.....	119
四、普通型高級中等學校教育階段.....	120
<b>陸、數學領域之議題融入說明</b> .....	122
一、融入議題之選擇.....	122
二、議題融入之做法.....	122
三、議題融入之示例說明.....	122
<b>柒、教學單元案例</b> .....	125
一、國小組—三角形與四邊形面積公式的應用.....	125
二、國中組—直角三角形的三角比.....	130
三、高中組—科學記號與 10 的冪次.....	136
<b>捌、新舊課綱之課程實施銜接分析與建議</b> .....	142

一、新舊課綱之課程實施銜接分析.....	142
二、新舊課綱之課程實施銜接建議.....	142
<b>玖、其他課程規劃建議(待發展, optional) .....</b>	<b>144</b>
<b>拾、課綱 Q&amp;A.....</b>	<b>145</b>
<b>附錄一：十二年國教數學領域課程綱要與九年一貫課程差異對照表 .....</b>	<b>150</b>
一、國民小學學習階段.....	150
二、國民中學學習階段.....	152
三、高級中等學校學習階段.....	153
<b>附錄二：數學名詞解釋 (暫放九年一貫資料參考) .....</b>	<b>156</b>

數學領域呼應《十二年國民基本教育課程綱要總綱》(以下簡稱《總綱》)「自發」、「互動」及「共好」的理念，培養下一代的核心素養，為其終身學習奠定基礎與職涯發展做好準備。為促進中小學教師及教科用書編輯對於《國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域課程綱要》(以下簡稱《數學領域課程綱要》)的理解，本課程手冊在課程與教學設計上，針對《數學領域課程綱要》的核心素養內涵提出解釋，說明素養導向教材的設計原則並提供案例；對於學習重點詮釋其內容、條目範圍、教學釋例與評量注意事項等；建議如何適時融入重要議題以及說明新舊課綱的學習銜接。

本課程手冊包含十章，分別為「壹、發展沿革與特色」、「貳、課程架構」、「參、核心素養與學習重點的呼應說明」、「肆、學習重點解析」、「伍、素養導向教材編寫之原則」、「陸、數學領域之議題融入說明」、「柒、教學單元案例」、「捌、新舊課綱之課程實施銜接分析與建議」、「玖、其他課程規劃建議」與「拾、課綱 Q&A」。另外有兩個附錄。

## 壹、發展沿革與特色

### 一、數學領域課程綱要的發展沿革

我國自從民國 57 年開始實施九年國民義務教育，本學科的名稱由「算術」改為「數學」，並根據《國民小學數學暫行課程標準(57)》從民國 57 年的一年級開始逐年實施，到民國 69 年的最後一屆六年級學生使用，才全面改成民國 64 年教育部正式頒布的《國民小學數學課程標準(64)》。此課程標準從民國 65 年起逐年實施，直到民國 89 年的最後一屆六年級學生，是目前壽命最長的課程標準。在這段時間內，全國都使用國立編譯館編撰的教科書(俗稱統編本)，此課本經過相當大規模的實驗，常稱為「板橋模式」。這段時期的小學數學注重數、量、形的內容學習，並把握三項原則：社會生活的需求，兒童身心的發展、與學習的妥當性。

同時期的國民中學數學課程標準則在民國 57 年制訂之後，歷經民國 61 年、72 年、74 年、83 年多次的修訂，其教學目標從數、量、形的基礎內容，逐漸延伸到重視學生的思考、推理與創造能力，並顧及情意面的學習興趣及數學素養。國民中學的數學課程，在民國 89 年被納入九年一貫課程。

普通高級中學的數學課程則為配合國民中學首屆畢業生而在民國 60 年訂立課程標準，至民國 72 年配合「高級中學法」而修訂高級中學課程標準，在民國 84 年因應社會變遷而再次修訂。高中數學的學習內容增加了「函數」項目，也都強調思考能力和應用於生活的素養，並且均指出數學在其他學科上的重要基礎性。

民國 80 年代，發生了一項重要的數學教育興革。美國數學教師協會 (National Council of Teachers of Mathematics，簡稱為 NCTM) 於 1989 年出版《學校數學課程與評鑑標準》(Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics) 強調數學能力的培養與數學概念的理解，從傳統以「教師為中心」轉向以「學生為中心」，教師不再是知識的「傳遞

者」而是學生知識建構的「協助者」。然而其過分著重概念理解卻輕忽計算能力的培養，招致數學家的批評，對於「概念理解」與「計算能力」發展孰輕孰重的爭論，發展成數學教育學者與數學家之間的數學戰爭。

此波風潮及於臺灣，則展現於民國 82 年頒布的《國民小學數學課程標準版課程標準(82)》，這份課程標準強調學生必須自行建構數學的意義，在教學目標中提到「...養成主動地從自己的經驗中，建構與理解數學的概念，...」，因此俗稱「建構式數學」。同年亦開放民間出版社編寫教科書，由四家出版商（南一、翰林、康軒、新學友）以及國立編譯館同時編製國小數學課本。因為開放的時間急迫，幾乎沒有經過實驗就送審，審查通過後即直接實施於小學。此課程從民國 85 年起逐年實施，至民國 92 年全面轉換為《九年一貫課程數學領域暫行綱要(89)》而止。

教育部於民國 89 年宣布實施九年一貫課程，將國小和國中課程做統整的規劃，並於同年頒布「暫行綱要」。自此，數學科改稱為「數學學習領域」。最劇烈的改變是，取消了數學傳統上具有較多授課時數的「主科」概念，而與其他學習領域平分。暫行綱要的數學課程似仍持續建構主義的理念，原本計畫些微調整後即為正式的綱要。然而，建構式數學不要求學生背誦九九乘法表和輕忽直式乘法計算，造成學生計算能力下降的疑慮，引起數學家批評建構式數學，中華民國數學學會便緊急向教育部建議暫緩正式綱要之公布，並另行邀集相關學者與教師，重新審議數學課程的設計，結果就是民國 92 年頒布的《九年一貫數學領域課程綱要(92)》，從民國 94 年起正式逐年實施，並於民國 97 年微調修訂，自民國 100 年起實施迄今。

搭配九年一貫課程的實施，高中先後從民國 95 年、99 年起，實施暫行綱要與新的綱要，並於民國 102 年微調。後期中等學校的數學課程，分成高中（普通高級中學之簡稱）、高職（高級職業中學之簡稱）、和綜合高中（綜合高級中學之簡稱）三類。

## 二、 研修目標與特色

### (一) 規劃十二年一貫的數學課程綱要

數學課程綱要大約每隔十年研修一次，本次研修適逢十二年國民基本教育（以下簡稱十二年國教）開始實施，修訂課程綱要時可以用十二年一貫的架構，整體檢視，規劃出適合現代國民需要的數學課程內容，並希望能避免現行數學課程綱要在國高中之間銜接上的困難。

一方面，要回應世界各國朝向培養數學素養的趨勢，著重學生能將生活中所遇到的問題轉化成數學問題並且解決它，並能欣賞數學的美並對數學有正向的態度。另一方面，要盡力改善我國中小學生的數學評量成績有高成就與高落差、對數學的態度與學習信心不佳的現象，達成十二年國教把每一位學生帶上來、適性揚才的重要理念，實踐數學教育公平受教的原則。

### (二) 提倡培養學生正確使用工具的素養

歷年的數學課程綱要，都在實施要點中提及要教導學生使用計算機，只是計算機教學從

未在我國的中小學教育認真實施；甚至有些實用科目，在例題或考題中，都只敢出現特殊規劃好的數據。工具對於數學教學與學習助益極大。然而，我國即使在最基本的計算機教學，都遠遠落後於世界各先進國家。有鑑於此，這次的數學課程綱要研修小組決定，要認真修訂課程綱要內容，讓全國學生真的學到使用計算機的能力。數學教學應從教導使用計算機開始，逐漸引導學生使用各種高階工具。數學課程綱要研修小組檢討發現，我國這個現象可能有下述三種原因。

首先，一些數學教師害怕，學生是否因為使用計算機，反而不好好學習數學原理原則，只一味地胡亂使用機器計算。對於這樣的憂慮，我們強調，要同時教導學生「**使用計算機的正確態度**」。所以定調，國小是學生奠定數學基礎的階段，計算機教學從國中開始，並且強調，學生在熟練計算原理後，為避免繁複計算因而降低學習效率，才適當使用計算機。

其次，歷年來的數學課程綱要，都只在實施要點提及要使用計算機，教科書作者及教師並不清楚教材的何處要使用，教科書中若無著墨，教師也無暇思索，以至於未能落實計算機教學。本次數學課程綱要，將計算機的使用納入課綱的條文，明白指出何處適合使用計算機。

最後，臺灣的全國性大型考試（全國技術人員考試例外）都不准使用計算機，這有其防止作弊的需求，而且考試本來就應該與教學脫鉤才對。只是，臺灣是一個考試領導教學的國家，考試不考，教師就樂得不教，或是不願意花時間教。進一步說，全國性大型考試的規範，更暗示計算工具的不需要，甚至不正當。希望教育當局能導正此一錯誤的政策。

### (三) 確實規劃從高二開始數學分類教學

數學內容在國中小大致上是所有人都應該要學習的，進入高中之後，學生因為理工商文的性向逐漸顯露，對數學的需求及接受度逐漸因人而異，分類教學勢在必然；世界各國都是如此，只是差異度極大，幾乎沒有範例可以讓我們輕鬆比照。我國歷年來，高中數學內容也變化極多，到了最近的版本，高一時所有學生必修一種共同的數學，高二時的必修數學分 A、B 兩版，但是課程綱要實際上還是一份，只是最後三節標記雙圈，學得少的學生就不學這些部分，到了高三才分成數學甲、乙兩版選修。這樣的做法，在課程綱要訂定、教科書編撰、教學安排、甚至大考內容等各方面都有方便之處，只是苦了那些數學需求性比較少的學生。

十二年國教總綱最初為回應高中生有更多選修的彈性，將原本各科的必修學分扣除四分之一，改成選修，讓學校有更獨立自主的規劃空間，立意甚佳；其實，數學已經領先其他領域，早就已經將高三改為選修，是更積極的將三分之一學分列為選修。總綱在一視同仁的簡單計算（及國文領域的堅持）下，各界視為主科的國文、英文、數學的必修學分數從現行的 24、24、16，被規劃為 20（含中國文化基本教材 2）、18、12，各界譁然，特別是數學超低必修學分，大眾難以接受。

平心而論，如果把 12 學分規劃為所有人最低要修三學期數學，再依照個人對數學的需求，逐漸去選修必要的數學，是可以回應有些人的確是不需要學三年數學這件事。只是，這

樣的規劃，對於後續的教學、大考等並未仔細規劃，無人了解此事的可行性。並且對於數學早已先行高三選修一事未被納入考量，各界的反對，層級高達眾多包含人文類的中央研究院院士，這應該是總綱規劃始料未及。經過長時間討論，數學領域課程綱要小組總算說服相關長官及委員會，高中數學的必修學分數回歸 16。在這樣的背景下，小組有義務在高二的必修學分做到確實分類，讓不同程度的學生可以確實學到他們所需要的數學，但不必強迫數學需求少的學生硬要修習過多數學。

#### (四) 與高職數學的整合

前一任的高中數學課程綱要研修小組，經過許多研究，並與國際上各種數學課程綱要比較，將本來在高二下修習的排列組合和機率統計移到高一下，原本在高一下比較困難的三角函數的內容往後移。這樣的安排，在先教容易再教困難內容的邏輯上十分實際。一開始大家可能還不習慣，但是後來逐漸也能發現其優點。

只是，當時的高職數學課程綱要小組另有成員，並未討論此事。在沒有溝通管道的情況下，高職數學課程綱要沿用原架構，雙方在高一的課程差異到達半年之多。本來高中和高職各行其是也無不可。只是，臺灣有綜合高中的學制，在這個體制下，每年一萬八千的高一學生，到高二時，有百分之四十五要轉到學術學程、念普通高中的軌道，有百分之五十五要轉到專門學程、念高職的軌道。因此，這些學生在高一的數學要念甚麼內容，引發很大困難，教育部為此做了許多補救措施，但總是不能兼顧。為此，高中（現稱普通型高級中等學校）與高職（現稱技術型高級中等學校）的內容，如何能盡量求同，是一件重要的事情。

### 三、 研修原則

#### (一) 總綱共同原則

1. 在九年一貫課程綱要與高中 99 課程綱要的基礎上精進與創新。
2. 參考國內外相關研究，呼應世界主要國家教育發展趨勢。
3. 研修委員之組成及遴聘符合程序，並依民主議事程序與原則研修課程綱要。
4. 廣納各界意見，並與其他領域課程綱要研修同步滾動調整與修正。

#### (二) 數學課程綱要之特色與原則

1. 呼應總綱三大面向的核心素養，建構數學領域的核心素養。
2. 強化國小、國中與高中學習階段課程縱向連貫與橫向統整。
3. 著重普通型高級中等學校（簡稱普高）、技術型高級中等學校（簡稱技高）10 年級學習內容的共通性。
4. 學習重點與實施要點納入計算機使用與相關配套，培養學生使用計算機的正确態度。
5. 實施要點納入適性學習、差異化教學、有效教學、多元評量等理念。

#### 四、 研修過程

《數學領域課程綱要》研修流程包括研修階段、研議階段及公聽階段，工作期程 103 年 6 月 1 日起至 105 年 4 月 30 日止，並送教育部課程審議委員會審議，參見圖 1。



圖 1：十二年國教數學領域課綱要研修流程。

#### 五、 新舊課綱比較

十二年國教著重以人為本的全人教育，三大面向的核心素養「自主行動」、「溝通互動」與「社會參與」強調培養有能力、有意願進行終身學習的學習者，能解決生活情境中所遇到的問題，並能因應社會與時代變遷而不斷自我精進。其課程發展的想法為藉由各領域的學習共同成就核心素養的培養，不像九年一貫課程每個學習領域都要承擔十大能力發展的任務。核心素養在十二年國教課程中作為領域或科目課程發展垂直連貫與水平統整的主要組織核心，並具體轉化為領域的「學習表現」與「學習內容」。這與《九年一貫數學學習領域課程綱要》的「能力指標」與《普通高級中學 99 課程綱要》的「子題/內容」的形式有所不同。

《九年一貫數學學習領域課程綱要》的架構是由五大主題能力指標「數與量」、「幾何」、「代數」、「統計與機率」和「連結」所構成；而《高級中學 99 數學課綱》則是由主題所構成，例如：數與式，多項式函數。兩者之間的格式並不一致。《十二年國教數學領域課程綱要》以「數與量」、「空間與形狀」、「坐標幾何」、「關係」、「代數」、「函數」、「資料與不確定性」做為學習重點的主題類別，讓各教育階段的學習表現與學習內容格式一致。其中，學習表現中的 r 為國民小學階段專用，至國民中學、普通型高級中等學校後轉換發展為 a 和 f；學習內容的 R 為國民小學階段專用，至國民中學、普通型高級中等學校後轉換發展為 A 和 F。

另外，在高級中學階段，《十二年國教數學領域課程綱要》按照總綱的規畫，在 11 年級



設計 A 與 B 兩類差異化課程，讓不同學習需求學生修習；在 12 年級規劃加深加廣選修課程分甲與乙兩類，為學生的往後的大學學習做好銜接與準備。這與以往《高級中學 99 數學課綱》的 A、B 兩版課程有所不同，其中 B 版的內容包含 A 版，增加的題材以加註雙圈符號作區隔。新的數學領綱確實做到課程分類，以滿足不同學習需求的學生有機會學到所需要的數學。附件一按學習階段以「新增」、「強化」、「調移」、「減少」、「刪除」進一步說明新、舊課綱的不同之處。

## 貳、課程架構

### 一、課程架構規劃說明

十二年國教的學制劃分為三個教育階段，分別為國民小學六年、國民中學三年、高級中等學校三年。各教育階段之數學領域課程架構分述如後。

#### (一) 國民中小學

國民小學數學領域課程自一年級開始，其中一、二年級為第一學習階段，三、四年級為第二學習階段，五、六年級為第三學習階段，七、八、九年級為第四學習階段。部定課程每週節數為四堂課。國民中小學數學領域課程架構如表 1。

表 1：十二年國教國民中小學數學領域課程架構。

學習階段	階段學習重點	備註
第一學習階段	能初步掌握數、量、形的概念，其重點在自然數及其運算、長度與簡單圖形的認識。	彈性學習課程可規劃數學奠基與探索活動。讓學生探索、討論，培養對數學的喜好，奠立單元學習的先備基礎，進行有意義的學習。
第二學習階段	在數方面，能確實掌握自然數的四則與混合運算，培養流暢的數字感，並初步學習分數與小數的概念。在量方面，以長度為基礎，學習量的常用單位及其計算。在幾何方面，發展以角、邊要素認識幾何圖形的能力，並能以操作認識幾何圖形的性質。	
第三學習階段	確實掌握分數與小數的四則計算。能以常用的數量關係，解決日常生活的問題。能認識簡單平面與立體形體的幾何性質，並理解其面積與體積的計算。能製作簡單的統計圖表。	
第四學習階段	在數方面，能認識負數與根式的概念與計算，並理解坐標表示的意義。在代數方面，要熟悉代數式的運算、解方程式及簡單的函數。在平面幾何方面，各年級分別學習直觀幾何（直觀、辨識與描述）、測量幾何、推理幾何；空間幾何略晚	

學習階段	階段學習重點	備註
	學習。能理解統計與機率的意義，並認識基本的統計方法。	

## (二) 普通型高級中等學校

依據《十二年國民基本教育課程綱要-總綱》及《十二年國民基本教育國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域課程綱要》各教育階段領域課程的規劃，普通型高級中等學校為第五學習階段。在必修部分安排總學分數為 16 學分的數學必修課程，包括兩部分：(1) 高中一年級（10 年級）8 學分，(2) 高中二年級（11 年級）8 學分，分為 A、B 兩類，學生擇一修習。而加深加廣選修部分，則在高中三年級（12 年級）安排 8 學分的數學甲課程，與 8 學分的數學乙課程。數學領域的課程架構與學分數如表 2，而數學從高中二年級起分為三個軌道的學習路徑如圖 2。

表 2：十二年國教普通型高級中等學校數學領域課程架構。

必修		加深加廣選修
高一	高二	高三
8 學分	A 類 8 學分	數學甲 8 學分
	B 類 8 學分	數學乙 8 學分

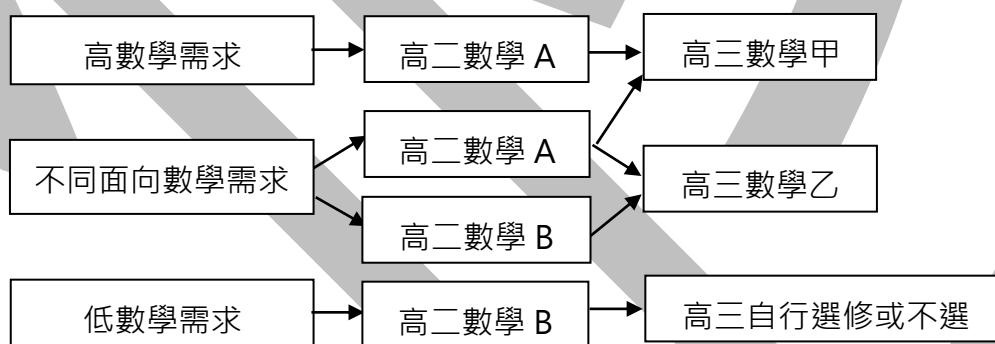


圖 2：高中二年級起數學分為三個軌道的學習路徑。

## 二、高中加深加廣選學、升學與職涯進路關係

《十二年國民基本教育國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域課程綱要》的必修課程規劃，提供學生掌握現代各專業領域所需之核心數學語言的學習機會。對於具備興趣、動機、或有志於朝向需要更多數學專業發展的學生，則規劃兩種加深加廣選修課程提供學習機會。必修與選修課程與職涯進路之關係如表 3，其學習成效之歷程檔案有助於學生升學及職涯進路選才參採之用。

備註：下表選修課程建議經聯招會之大學十八學群與高中選修課程相關資訊公告後填具，以提供選課參考。

表 3：普通型高級中等學校數學領域必選修課程與職涯進路關係。

學群	升學及 職涯進路	選修課程 建議	必、選修 課程	數學領域課程					備註
				必修			加深加廣選修		
				高一	高二 A	高二 B	數學 甲	數學 乙	
資訊學群	主要學類	資訊工程、資訊管理、數位設計、圖書資訊							
	生涯發展	程式設計師、資訊系統分析師、資訊管理人員、資訊產品研發人員、網路管理工程師、電子商務設計師、多媒體設計師、電腦遊戲設計師等。							
工程學群	主要學類	電機電子、機械工程、土木工程、化學工程、材料工程、科技管理							
	生涯發展	電機工程師、電子工程師、光電工程師、自動化工程師、通訊工程師、儀表工程師。 動力工程師、航空工程師、汽車工程師、造船工程師、機械設計工程師、電整合工程師。 土木工程師、工程監工、大地工程師、結構工程師、建築師、營建管理專業人員、工程技術與管理研究員。 化學工程師、環境工程師、分析工程師、藥劑工程師。 冶金工程師、材料工程師、材料分析工程師、材料研發人員。 工業工程師、決策分析師、品管工程師、物料管理工程師、生產管理。							
數理	主要學類	數學、物理、化學、統計、科學教育、自然科學							

化學群	生涯發展	數學研究與教學、物理研究與教學、化學研究與教學、理化技術諮詢服務、保險精算師、統計分析師。						
醫藥衛生學群	主要學類	醫學、牙醫、中醫、營養保健、護理、藥學、公共衛生、職業安全、醫學技術、復健醫學、健康照護、呼吸治療、獸醫、衛生教育、醫務管理、化妝品						
	生涯發展	醫師、藥師、護理師、公共衛生專業人員、醫事檢驗師、營養師、物理治療師、職能治療師、聽力師、語言治療師、呼吸治療師、病理藥理研究人員。						
生命科學學群	主要學類	生態、生命科學、生物科技、植物保護、生化						
	生涯發展	生物教師、生物學研究人員、動植物研究人員、生物科技專業人員、生態保育專業人員、病理藥理研究人員。						
生物資源學群	主要學類	農藝、動物科學、園藝、森林、食品生技、海洋資源、水土保持						
	生涯發展	獸醫師、生態保育專業人員。生物技術研發人員、農藥及肥料研發、景觀設計規劃師、園藝企業經營、牧場經營、畜牧業技師、畜產管理、食品研發品管、動物園技師、環保技師、自然資源保育師、環境保育師。						
地球與環境學群	主要學類	地球科學、地理、地質、大氣、海洋科學、環境科學、防災						
	生涯發展	地理或地球科學教師、天文學研究人員、氣象學研究人員、地質學及地球科學研究人員、地質探測工程師、探勘工程師、地震研究員、大地工程師、採礦工程師、測量師、環境工程師。						

建築與設計學群	主要學類	建築、景觀與空間設計、都市計畫、工業設計、商業設計、織品與服裝設計、造型設計						
	生涯發展	建築師、景觀設計師、室內設計師、美術設計師、商業設計師、工業設計師、多媒體設計師、服裝設計師。						
藝術學群	主要學類	美術、音樂、舞蹈、表演藝術、雕塑、藝術與設計						
	生涯發展	美術教師、音樂教師、舞蹈老師、舞蹈家、畫家、音樂家、作家、表演工作者、劇作家、導演、燈光師、舞台設計師。						
社會與心理學群	主要學類	心理、輔導、社會、社會工作、犯罪防治、兒童與家庭、宗教						
	生涯發展	臨床心理師、輔導教師、社會工作人員、社會學研究人員、心理學研究人員、社會服務經理人員、人力資源師、神職人員。						
大眾傳播學群	主要學類	大眾傳播、新聞、廣播電視、廣告、電影						
	生涯發展	新聞記者、廣告企畫、廣播或電視專業人員、編輯、表演工作者、攝影師、導演、廣告或公關人員、影像處理師、數位內容創作、媒體設計人員、動畫設計。						
外語學群	主要學類	英語、歐洲語文、日本語文、東方語文、應用語文、英語教育						
	生涯發展	英文教師、外語教師、編譯人員、語言學研究人員、外貿拓展人員、外交人員、旅遊人員。						
文史	主要學類	中國語文、台灣語文、歷史、哲學、史地、國語文教育						

哲學群	生涯發展	文史教師、文字編輯、作家或評論家、文物管理師、哲學歷史研究人員、語言學研究人員。						
	主要學類	教育、公民教育、幼兒教育、特殊教育、社會科教育、社會教育						
教育學群	生涯發展	中學教師、小學教師、學前教育教師、教育機構專業人員、校長及學校主管人員、教育研究人員。						
	主要學類	法律、政治、外交、行政管理						
法政學群	生涯發展	律師、法官、檢察官、書記官、代書、法律專業人員、民意代表、政府行政人員、安全人員。						
	主要學類	企業管理、運輸與物流管理、資產管理、行銷經營、勞工關係						
管理學群	生涯發展	行政或財務經理人員、證券或財務經紀人、人事或產業經理人員、市場銷售經理人員、市場分析人員、工商服務業經理人員。						
	主要學類	會計、財務金融、經濟、國際企業、保險、財稅						
財經學群	生涯發展	會計師、稅務專業人員、金融專業人員、財務經理人員、證券或財務經紀人、商業作業經理人員、保險專業人員。						
	主要學類	觀光事業、餐旅管理、休閒管理、體育、運動管理、體育推廣、運動保健						
遊憩與運動學群	生涯發展	旅館餐飲管理人員、休閒遊憩管理人員、運動員、體育教練、體育教師、體育休閒事業經理、運動器材經營者。						
	主要學類							

## 參、核心素養與學習重點的呼應說明

本領域各教育階段核心素養具體內涵係依循《總綱》核心素養內涵發展，結合本領域之基本理念與課程目標後的具體展現。各教育階段學習重點皆為例舉呈現，並做共同的原則說明。

### 一、國民小學教育階段

數學活動領域學習重點		數學領域 核心素養	說明
學習表現	學習內容		
n-I-3 應用加法和減法的計算或估算於日常應用解題。	N-2-5 解題：100元、500元。以操作活動為主兼及計。容許多元策略，協助建立數感。包含已學習之更小幣值。	數-E-A2 具備基本的算術操作能力，並能指認基本的形體與相對關係，在日常生活情境中，用數學表述與解決問題。	學生能運用加減乘除解決日常生活的問題；能識別基本形體的特徵與進行簡單分類。可透過讓學生操作、試驗、互動、蒐集資料與分類達成。
n-II-9 理解長度、角度、面積、容量、重量的常用單位與換算，培養量感與估測能力，並能做計算和應用解題。認識體積。	N-3-15 容量：「公升」、「毫升」。實測、量感、估測與計算。單位換算。	數-E-B1 具備日常語言與數字及算術符號之間的轉換能力，並能熟練操作日常使用之度量衡及時間，認識日常經驗中的幾何形體，並能以符號表示公式。	學生能把日常生活語言轉換成簡單數學語言進行問題解決，並能精熟度量衡與時間單位轉換，能藉由操作與探索建立幾何形體概念並能用數學符號表示公式。
d-II-1 報讀與製作一維表格、二維表格；報讀長條圖與折線圖，並據以做簡單推論。	D-3-1 一維表格與二維表格：以操作活動為主。報讀、說明與製作生活中的表格。二維表格含列聯表。	數-E-B2 具備報讀、製作基本統計圖表之能力。	藉由任務設計讓學生小組合作學習，或是由教師引導學生蒐集與整理資料，並選擇合適的統計圖表對於現實生活問題做推論與決策。

數學活動領域學習重點		數學領域 核心素養	說明
學習表現	學習內容		
s-II-4 在活動中，認識幾何概念的應用，如旋轉角、展開圖與空間形體。	S-3-4 立體形體與展開圖：以操作活動為主。初步體驗展開圖如何黏成立體形體。知道不同之展開圖可能黏合成同一形狀之立體形體。	數-E-B3 具備感受藝術作品中的數學形體或式樣的素養。	可結合日常生活常用的立體形體或藝術作品，讓學生藉由操作、討論，從中培養數學素養。
r-I-1 學習數學語言中的運算符號、關係符號、算式約定。	R-1-1 算式與符號：含加減算式中的數、加號、減號、等號。以說、讀、聽、寫、作檢驗學生的理解。適用於後續階段。	數-E-C3 具備理解與關心多元文化或語言的數學表徵的素養，並與自己的語言文化比較。	鼓勵學生從日常生活語言逐漸進到使用數學符號溝通想法，以數學史或民族數學增進學生對於多元文化的理解。

## 二、國民中學教育階段

數學領域學習重點		數學領域 核心素養	說明
學習表現	學習內容 (例舉)		
a-IV-1 理解並應用符號及文字敘述表達概念、運算、推理及證明。	A-7-1 代數符號：代數符號與運算；以代數符號表徵交換律、分配律、結合律；以符號紀錄生活中的情境問題。	數-J-A2 具備有理數、根式、坐標系之運作能力，並能以符號代表數或幾何物件，執行運算與推論，在生活情境或可理解的想像情境中，分析本質以解決問題。	可讓學生先使用生活化、非形式的語言進行討論與溝通，然後逐步引導他們發現使用數學符號進行運算與推論的方便性與簡潔性，從而使用數學的抽象思維來解決問題。
s-IV-4 理解平面圖形全等的意義，知道圖形經平移、旋轉、鏡射後仍保持全等，並能應用於解決幾何與日常生活的	S-8-4 全等圖形：全等圖形的意義（兩個圖形經過平移、旋轉或翻轉可以完全疊合）；兩個多邊形全等則其對應邊和對	數-J-B1 具備處理代數與幾何中數學關係的能力，並用以描述情境中的現象。能在經驗範圍內，以數學語言表述平面與空間的基本	帶領學生從動手操作或是相關的活動中，認識幾何與代數中的關係，並鼓勵他們發展精確的數學語言來說明二維平面或三維空間



數學領域學習重點		數學領域 核心素養	說明
學習表現	學習內容 (例舉)		
問題。	應角相等 ( 反之亦然 )。	關係和性質。能以基本的統計量與機率，描述生活中不確定性的程度。	的基本性質與關係。培養學生蒐集生活中的統計資料以及藉由實驗操作來處理生活中不確定性的問題。
n-IV-9 使用計算機計算比值、複雜的數式、小數或根式等四則運算與三角比的近似值問題，並能理解計算機可能產生誤差。	N-8-2 二次方根的近似值：二次方根的近似值；二次方根的整數部分；十分逼近法。使用計算機 $\sqrt{\quad}$ 鍵。	數-J-B2 具備正確使用計算機以增進學習的素養，包含知道其適用性與限制、認識其與數學知識的輔成價值、並能用以執行數學程序。能認識統計資料的基本特徵。	當進行計算機教學時，教師應視問題情境同時發展學生估算、心算、概算等相關能力；在讓學生體驗計算機在數學計算或是問題解決的益處時，也應引導學生從操作一些例子中察覺到計算機的可能限制。
s-IV-5 理解線對稱的意義和線對稱圖形的幾何性質，並能應用於解決幾何與日常生活的問題。	S-7-4 線對稱的性質：對稱線段等長；對稱角相等；對稱點的連線段會被對稱軸垂直平分。	數-J-B3 具備辨認藝術作品中的幾何形體或數量關係的素養。並能在數學的推導中，享受數學之美。	可引導學生從欣賞與討論一些藝術作品中，看出背後的幾何形體或是數量關係，並能運用相關的關係或是性質進行問題解決，瞭解數學的美與實用性。
s-IV-7 理解畢氏定理與其逆敘述，並能應用於數學解題與日常生活的問題。	S-8-6 畢氏定理：畢氏定理 ( 勾股弦定理、商高定理 ) 的意義及其數學史；畢氏定理在生活上的應用；三邊長滿足畢氏定理的三角形必定是直角三角形。	數-J-C3 具備敏察和接納數學發展的全球性歷史與地理背景的素養。	藉由數學史的引進或是相關文化的介紹，讓學生探索與瞭解不同文化、地區脈絡下的數學發展以及特性。

### 三、普通型高級中等學校教育階段

數學領域學習重點		數學領域 核心素養	說明
學習表現	學習內容 (例舉)		
f-V-4 認識指數與對數函數的圖形特徵，理解其特徵的意義，認識以指數函數為數學模型的成長或衰退現象，並能用以溝通和解決問題。	F-11A-4 指數與對數函數：指數函數及其圖形，按比例成長或衰退的數學模型，常用對數函數的圖形，在科學和金融上的應用。	數-S-U-A2 具備數學模型的基本工具，以數學模型解決典型的現實問題。了解數學在觀察歸納之後還須演繹證明的思維特徵及其價值。	運用科學和商業的相關任務營造讓學生進行觀察、探索與有能力建模以解決相關現實問題的課室環境。在歸結與抽象出現象背後的原理或模型之後，學生應有機會瞭解歸納思維的侷限性並能應用演繹思維來論證所得結果之正確性。
f-V-3 認識三角函數的圖形特徵，理解其特徵的意義，認識以正弦函數為數學模型的週期性現象，並能用以溝通和解決問題。	F-11A-2 正餘弦的疊合：同頻波疊合後的頻率、振幅。	數-S-U-B1 具備描述狀態、關係、運算的數學符號的素養，掌握這些符號與日常語言的輔成價值；並能根據此符號執行操作程序，用以陳述情境中的問題，並能用以呈現數學操作或推論的過程。	設計現實情境任務讓學生去操作與討論數學符號以表徵狀態、關係或運算。引導學生能根據問題敘述提取相關數據與條件，將問題中的生活語言轉換成數學符號，並根據問題條件進行操作或推論，最後將得到的結果進行詮釋以解決問題。
d-V-2 能判斷分析數據的時機，能選用適當的統計量作為描述數據的參數，理解數據分析可能產生的例外，並能處理例外。	D-10-2 數據分析：一維數據的平均數、標準差。二維數據的散布圖，最適直線與相關係數，數據的標準化。	數-S-U-B2 具備正確使用計算機和電腦軟體以增進學習的素養，包含知道其適用性與限制、認識其與數學知識的輔成價值，並能用以執行數學程序。能解讀、批判及反思媒體表	在數位學習環境中打造合適的任務，讓學生使用資訊科技工具進行資料蒐集、數據分析與解讀，同時讓學生體驗計算機與電腦軟體對於建立數學模型與解決數學問題的威力

數學領域學習重點		數學領域 核心素養	說明
學習表現	學習內容 (例舉)		
		達的資訊意涵與議題本質。	和限制。設計結合媒體識讀與數學的任務讓學生探討、反思與批判媒體報導以及相關的社會議題。
s-V-2 察覺並理解空間的基本特質，以及空間中的點、直線、與平面的關係。認識空間中的特殊曲線，並能察覺與欣賞生活中的範例。	S-11A-1 空間概念：空間的基本性質，空間中兩直線、兩平面、及直線與平面的位置關係，三垂線定理。	數-S-U-B3 具備掌握數學作為藝術創作原理或人類感知模型的素養，並願意嘗試運用數學原理協助藝術創作。	可從賞析投影幾何或是體現奇妙的悖論、錯覺等美術作品或是探討樂譜拍子、樂聲本質，認識藝術作品背後的數學原理，並進行相關的藝術創作。
n-V-5 能察覺並規律並以一般項或遞迴方式表現，進而熟悉級數的操作。理解數學歸納法的意義，並能用於數學論證。	N-10-6 數列、級數與遞迴關係：有限項遞迴數列，有限項等比級數，常用的求和公式，數學歸納法。	數-S-U-C3 具備欣賞數學觀念或工具跨文化傳承的歷史與地理背景的視野，並了解其促成技術發展或文化差異的範例。	從探討不同文化或地域的所發展出來的民族數學，瞭解數學概念發展的脈絡與環境，以及工具與技術的進步和數學知識的發展交織的關係和影響。

## 肆、學習重點解析

### 一、國民小學教育階段

<b>N-1-1 一百以內的數：</b> 含操作活動。用數表示多少與順序。結合數數、位值表徵、位值表。位值單位「個」和「十」。位值單位換算。認識 0 的位值意義。 <b>補充說明：</b> 教學可數到最後的「一百」，但不進行超過一百的教學。能點數代表十的積木。連結 0 的位值意義與二年級直式計算之學習。可觀察百數表模式。	n-1-1
--	-------

**連結：**N-1-2、N-1-4、D-1-1。

**後續：**N-2-1。

#### 基本說明

1. 數（正整數與 0）是學習數學的基礎，是一年級的首要數學課程目標。教師應從操作活動入手，讓學生初步但充分理解數的符號、位值結構與日常應用，並支援加減法學習。由於許多學生在入小學前已經多少有數數經驗，教師應注意如何運用與整合學生的這些先備經驗。
2. 學生對「數」最早的經驗來自數數，因此首先應結合聲音、圖像、數字、單位（量），讓學生在具體情境中掌握數詞序列的規律，以說、讀、聽、寫、做各種活動，表示並應用 100 以內的數。
3. 運用位值積木與位值表，理解數字結構。例如數字「25」是 2 個「十」和 5 個「一」，其中 2 所在的位置是「十位」，其位值單位為「十」，這時的 2 表示 20；5 所在的位置是「個位」，位值單位為「一」，這時的 5 就是 5。配合恰當教具教學，學生學習位值與位值單位轉換來理解數字的意義，其中包括例如 25 個「一」，如何轉化成 2 個「十」和 5 個「一」，以及反向確認 2 個「十」和 5 個「一」就是 25 個「一」。教具應包含位值積木，以及運用花片十個一堆的點數方式。
4. 學生的數數經驗雖然沒有「0」，但必須知道 0 在位值系統中的意義——代表空位。因此學生要學習 0 作為一個數表示「沒有東西」的意義。學生應理解如果沒有「0」，2 個「十」和 2 個「一」的位值記法就會混淆。
5. 數數很難處理大數，學生必須學習位值記法，才能進入更豐富的「數」世界。但這不表示數數不重要，尤其是局部的順數與倒數（例如從 45 開始往後數 5 或倒數 5），在加減法與位值教學有其價值。練習「兩個一數」、「五個一數」、「十個一數」也有助日後乘除法的學習。
6. 比較是數的基本應用，如比較「多少」、「大小」、「順序」、「長短」（N-1-5）等日常應用。一年級比較活動以初步建立「對應」的比較模型以及其多樣應用為主，並以數數和位值兩種方式來思考解題。不論是數量（基數）或序數的問題，均應結合「單位」來學習，避免做純粹數字比較。
7. 序數初期的表徵方式帶有明顯的方向性，可以和各種相對方向的常用語詞同時教學，如「上下」、「左右」、「前後」。但在教學時，應先與學生約定溝通清楚。例如講清楚從哪裡開始數；「18 前面(或後面)是什麼數？」的「前」「後」的意義。序數是「數線」表徵的先備經驗，建議從一年級開始，就將數的序列圖像化，並和數數活動結合。

#### 條目範圍

1. 教學上數數可數到最後的「100」，但不進行超過一百的教學，也不介紹位值單位「百」(N-2-1)。
2. 能點數「十位積木」，並在記錄成數字時解釋「0」的位值意義。不過一年級的加減法尚未使用直式計算，加減教學上尚不需強調「0」的這個面向。
3. 教學上可觀察百數表中明顯與位值有關的模式。其他有趣的問題則請老師斟酌時間，可擺入探索或留到日後再學習。
4. 一年級的比較問題中不出現「>」、「<」的符號，也不處理比較的遞移性質(R-2-1)。

### 釋例

1. 教具：國小的數概念教學經常用到四種教具：

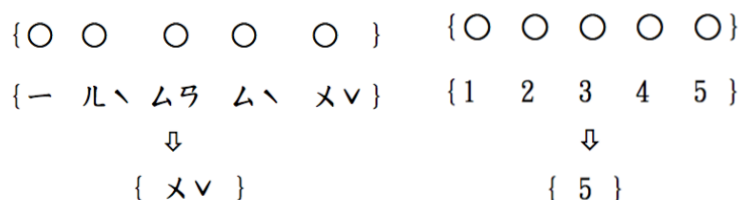
- (1) 花片：1個、1疊(10個)。
- (2) 積木：白色積木(表示1)、橘色積木(表示10)、百格板(表示100)。
- (3) 錢幣：一元、十元硬幣(或圖卡)，百元鈔票(或圖卡)等。
- (4) 圖像：畫出圖像①代表1個物件、圖像⑩代表10個物件.....等。

這四種教具可以區分成兩類，第一類是成比例的教具，包含花片和積木；第二類是不成比例的教具，包含錢幣及圖像。

2. 布置各種教學情境(包含「可移動或不可移動」、「排列整齊或散置」、「單類或多類物件」，讓學生掌握標準數詞順序及保持數詞與物件的一對一對應關係，完成正確的數數活動。

- (1) 例1：數概念與一對一的對應關係：

- 透過點數活動，以聲音對應物件的方式，建立一對一對應的關係，並利用最後一個聲音或數字(例如ㄨˇ 或 5)，抽象的代表前面念過的那幾個聲音，直接學習抽象出來聲音(例如ㄨˇ)的寫法(例如5)。下圖說明如何利用數詞序列來溝通個數。



- 學生在進行點數活動時，教師必須留意兩件事情：
  - 學生是否能正確按照數詞的順序使用數詞。
  - 點數時，是否能正確的將數詞與物件保持一對一對應的關係。

- (2) 例2：個數的多少和數字的大小：

- 數量的比較有兩種策略，一是基於「數數」，二是進行配對。前者學生有一定的經驗，後者讓學生經歷「配對」活動的歷程，蘊含了「一一對應」的概念。
- 體驗數相對大小關係是重要的，但要建立在理解的基礎上。建議一開始在比較物件的個數時，教師應該指導學生使用「5個蘋果比2個蘋果多」或「2個梨子比5個梨子少」的語詞來描述比較的結果。
- 至於像「5比2大」、「2比5小」和利用最後一個聲音抽象代表前面念過的那幾個聲音的概念相同，至少要在學生已經熟練5個比2個多，2個比5個少，才可以進一步用「5比2大」、或「2比5小」的語詞來描述比較個數的結果。

3. 以各種教學形式(包含「個別、小組、全班」)，進行「物件、數詞、數字」之間互相轉換之說讀聽寫做的活動。「說」是使用數詞(聲音)來描述這堆物件的個數是多少個，「讀」是看懂別人寫出來的數字所代表物件的個數，「聽」是聽懂別人說出的數詞所代表物件的個數，「寫」是使用數字(符號)來描述這堆物件的個數是多少個。做數(表現數)指的是聽到數詞或看到數字，能拿出相對應個數的物件。例如聽到數詞「五」，或看到數字「5」，能拿出 5 個梨子的圖卡、5 個花片等來表示。
4. 「0」認識，有兩種教學方式：
- (1) 透過「由有到無」連續的情境，引入 0 的需求，例如在魚缸原來有 3 條魚，要求學童說出「三」條魚，或記成「3」條魚，再依序撈走 1 條魚，進行相同的活動，當魚缸裡沒有魚時，教師宣告沒有魚可以記成「0」條魚，讀作「〇」條魚。例如：數一數，下圖有幾條魚，請你寫寫看。

2 數一數，有幾條魚？



(《部》第一冊課本 P.11,《部》即《部編本國小數學》)

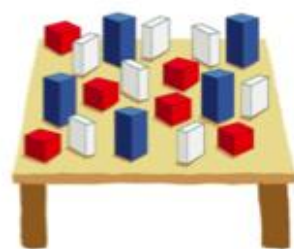
- (2) 例如：桌上擺放各種白、藍、紅三種顏色的積木，問桌上有綠色積木嗎？當學童回答沒有綠色積木時，再宣告沒有綠色積木可以記成「0」個綠色積木，「0」讀作「〇」。

桌上有

個白色積木。

個藍色積木。

個紅色積木。



桌上有綠色積木嗎？

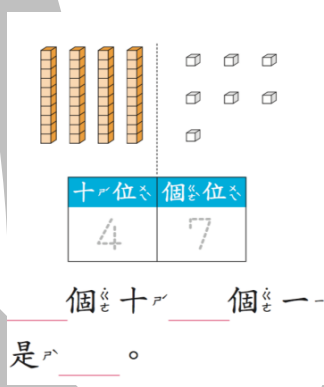
(《部》第一冊課本 P.11)

5. 理解數的位值結構和「位值表」的教學(含「0」代表空位)。
- (1) 認識 11~20 的各數是幫助學生建立位值概念的重要知識點之一，從這裡開始，學生對數的認識不僅僅是單獨的一個一個數，而是以十個為一群進行數數，這是建立十進制位值概念的重要階段。
- (2) 數量範圍從 20 擴展到 100 時，除了指導學生用不同的方法點數物件外，也要幫助學生從中抽象出 100 以內的數。在點數較多物件時，讓學生體會按 10 個、10 個分堆數數的便利性，並在位值表記錄數字表示物件的數目，進一步讓學生體會位值的意義。

(3) 進行位值教學時，可以使用教具來說明，像是數學積木、圖像①、⑩...等來說明 1 和 10 的關係。

● 例 1：使用積木表示 100 以內的數量

- 請學生拿出 47 個白色積木，並說明 10 個白色積木換一條橘色積木，問 47 個白色積木可以換成幾條橘色積木和幾個白色積木？並將數值記在位值表上，再問「4」和「7」所代表的意義分別為何？請學生拿出 47 個白色積木，並說明 10 個白色積木換一條橘色積木，問 47 個白色積木可以換成幾條橘色積木和幾個白色積木？並將數值記在位值表上，再問「4」和「7」所代表的意義分別為何？



(《部》第二冊課本 P.8)

- 請學生拿出 60 個白色積木，並說明 10 個白色積木換一條橘色積木，問 60 個白色積木可以換成幾條橘色積木和幾個白色積木？並將數值記在位值表上，再問「6」和「0」所代表的意義分別為何？

● 例 2：使用代表①、⑩的圖像表示 100 以內的數詞。

- 請學生用畫 10 元和 1 元的方式表示出 74 元，並問「7」和「4」在哪裡看得出來？它們所代表的意義為何？
- 請學生用畫 10 元和 1 元的方式表示出 80 元，並問「8」和「0」在哪裡看得出來？它們所代表的意義為何？

● 例 3：區分相同數字在不同位值上的差別。(配合白色積木和橘色積木)

- 請學生說明「22」中兩個「2」的異同在哪裡？

6. 進行各種數數活動，加強數感的練習。

(1) 二個(五個或十個)一數的數數活動：多個一數的方式在生活中也常用到，二個一數、五個一數和十個一數的數詞序列，聲音的節奏有規律，學童可以比較容易掌握且快速的唱數。同時，「二個一數」和「五個一數」也是二年級學習 2 的乘法、5 的乘法的基礎。

- 例如：二個一數：「2、4、6、...」；五個一數：「5、10、15、...」；十個一數：「10、20、30、...」讓學生透過多個一數的方式，點數各種不同物件。

(2) 局部數數(順數或倒數)活動：建議順數和倒數的活動都要兼顧，這對日後透過點數策略解決加法或減法問題，會有很大的幫助。

- 例如：順數：「1、2、3、4、5」；「88、89、90、91、92」；倒數：「5、4、3、2、1」；「92、91、90、89、88」讓學生局部數數的方式，點數各種不同物件。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

局部順數、倒數

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

10個一數（順數、倒數）

(3)「多十或少十」一數的數數活動，學生應察覺十位的變化：

- 例如：利用百數表進行十個一數的的順數及倒數，順數：「10、20、30、40、50」、「58、68、78、88、98」；倒數：「50、40、30、20、10」、「98、88、78、68、58」。

(4) 面對零散排列積木(以 24 個白色積木為例)，如何有效運用數數的策略：

- 例如：可以透過「一個一數」的數數活動，由 1 開始數到 24，算出共有 24 個。也可以利用「又十及又一數數活動」，例如：10、20、21、22、23、24 或 1、2、3、4、14、24 來點數，算出共有 24 個，比較有效率。

(5) 序數的教學：序數是「數線」表徵的先備經驗，建議從一年級起就開始將數的序列圖像化，並和數數活動結合。初期的序數表徵方式通常是有明顯的方向性，因此可以和各種相對方向的常用語詞同時教學，如「上下」、「左右」、「前後」，但在教學應先與學生溝通清楚。

- 例 1：看圖回答問題



(《部》課本第二冊 P.17)

- 例 2：動物園遊會有 8 個攤位，第幾個攤位在賣草莓呢？



(《部》第二冊課本 P.16~17)

- 例 3：用十二生肖的排行說明「前後」的約定(見下圖)，第 1 個動物是老鼠，往後數 2 個是老虎，老虎排行第 3；排行第 6 的動物是蛇，往前數 2 個是兔子，兔子排



行第 4。



(《部》第二冊課本 P.14~15)

### 錯誤類型

1. 學生進行數數活動時，發生重複或漏數的狀況。

物件：● ● ● ● ● ...

數數：1 2 3 4 5 6 ...

物件：● ● ● ● ● ...

數數：1 2 4 5 6 ...

建議：針對不能流暢唱數的學生，可用分布練習之方式加強。若原因出自點數不可移動且排列不整齊之物品，可用標記或分類來協助。

2. 學生在數數時無法正確或流暢「過十」。如「...、68、69、40(錯誤)、41、...」或「...、28、29...(停頓)30、31...」。

觀察「過十」時十位數的變化，如 69 後是 70，因為十位數 6 後是 7。

3. 學生混淆「基數(總量)」與「序數(第幾個)」的問題情境。

(1) 例：有 6 個圓圈，問「全部有幾個圓圈？」學生點數後誤以為「第 6 個」是全部；問「第 6 個在哪裡？」，學生點數後誤以為全部圓圈是「第 6 個」。



建議：利用生活情境溝通如「排隊隊伍中的第 6 個同學」以及「需要 6 個同學幫忙」的「6」意義不同，協助釐清語言的混淆。

4. 位值表徵的錯誤：

(1) 例 1：未能掌握位值表上，每一位值位置只能出現一個數字。

(2) 例 2：不會使用 0。混淆如 2 個「十」和 2 個「一」的記法。

(3) 例 3：學生不能正確讀出指定數字，或不能正確寫出老師所讀的數字。如 32 讀成「三

二」；將所讀的「三十二」記成「302」。

建議：加強位值表教學，教導學生數字正確的讀法與記法。

## 評量

1. 能透過一對一對應數數，掌握 1 至 100 的數詞序列。
2. 能以說、讀、聽、寫、做各種活動，表現 100 以內的數。
3. 能理解「十」和「一」代表的位值。
4. 能做位值單位「十」和「一」的轉換，理解數字的位值結構。
5. 能認識「0」表示沒有，及「0」在位值系統中的意義。
6. 能做 2、5、10 個一數。局部順數與倒數。「多 10 或少 10」。
7. 能在生活情境中正確使用「基數」與「序數」。

## 注意事項

1. 教師宜在教學中同時評量學生學習進展，讓學生多練習、表現或判斷。教師逐漸增加或減少物件數量，全班進行數數；也可兩個學生分成一組，一位先數，另一位確認，然後互換角色。
2. 小一文字能力不足，紙筆評量題目不宜過長，但應題意完整或搭配圖示，避免誤解題意。不然會誤導學生或教師，錯估教學效果或學生能力。
3. 不宜用紙筆評量學生「讀」數，例如：「25 讀做( )」，應用口語讀出。

<p><b>N-1-2：加法和減法的意義與應用。</b>含「添加型」、「併加型」、「拿走型」、「比較型」等應用問題。加法和減法算式。</p> <p><b>補充說明：</b>強調「併加」以理解加法交換律。處理「0」。含加減法並陳之單元，使學生察覺加法和減法問題的差異。一年級不做加數、被加數、減數、被減數未知題型。</p>	n-1-2
--	-------

連結：N-1-1、N-1-3、N-1-4、N-1-5、R-1-1、R-1-2、D-1-1。

後續：N-2-2、N-2-3、N-2-4。

## 基本說明

1. 加減法是最基本的數學運算，有最廣泛的日常應用。以數數與位值概念為基礎（N-1-1），一年級加減法的學習有三個重點：在應用中理解加減法的意義，並由數數過渡到合成分解模型（本條目與 R-1-2）；初步認識算式（橫式）與符號（本條目與 R-1-1）；熟練基本加減法（N-1-3）。
2. 一年級學習解加減應用時，無論如何分析問題（如使用花片、畫圈等），都要把想法記成加減法的橫式，並建立將計算結果記在等號後的習慣。例如：6 顆葡萄和 8 顆葡萄合起來是 14 顆葡萄，記成  $6+8=14$ ；15 顆芭樂吃掉 2 顆剩下 13 顆芭樂，記成  $15-2=13$ 。為了檢查學生是否理解加減算式的意義，可讓學生擬出對應的生活應用情境（R-1-1）。學生也應理解「被減數」比「減數」大的約定（R-1-1）。
3. 「添加型」：先固定一數，再「加入」一數之「加」法。例如「教室中有 8 個人，又進來 4 個人，教室中有多少人？」這也相當於從一數開始順數的能力。
4. 「拿走型」：先固定一數，再「移走」一數之「減」法。例如「教室中有 12 個人，出去 7 個人，教室中還有多少人？」這也相當於從一數開始倒數的能力。
5. 「併加型」和「分解型」：將分開兩數量，合起來是多少（「加」）；將一數量分拆，移走一部分，還剩多少（「減」）。例如「左手有 4 顆糖果，右手有 7 顆，合起來是多少顆？」一

般不區分「分解型」和「拿走型」問題。

6. 加減法的合成分解模型：「併加與分解」就是學習加減法最基本的合成分解模型，教師應清楚引導學生熟悉這個模型，學習用合成分解模型(或應用表徵)去思考一般加減法算式。其基本應用例如做較大數的加減法(如  $24+38$ 、 $49-15$  是多少？能以幾個「十」、幾個「一」的合成分解來思考解題)；以及加法交換律的說明(R-1-2)。
7. 「比較型」：以 N-1-1 建立之「對應」比較模型，回答「多幾個」、「少幾個」的減法問題。「比較型」問題相對比較困難(因為用數數易生混淆)，須結合新學的思考方式來理解，建議放在一年級下學期教學。
8. 學習加減法的意義與應用情境時，數量不需過大。較大數加減法教學的困難不在加減法的意義，而是擁有確實的位值觀念(尤其有「進位」「退位」需求時)、橫式記錄的經驗、基本加減法的熟練，故宜在一年級下學期教學。
9. 學習加減法的意義時，數量雖不需過大，但在學習加減法時，仍應將數量範圍依一定教學策略循序擴大，首先是基本加減法(N-1-3)，一年級下學期則進行到兩位數加減法學習。學生應充分結合位值積木點數、單位轉換，以及加減法的合成分解，學習兩位數的加減法。其重點在於了解在位值系統中做加減法的意義(因此需含少數進位與退位的例子)。
10. 一年級加減法教學，以日常應用為重心。但教學要保留一定時間，練習無應用情境的「計算題」，例如  $16+8=24$ 、 $23-8=15$ ，在不用直式計算的情況下，學習用比較抽象的數數、表徵(如花片的合成分解)或位值經驗來思考解題。

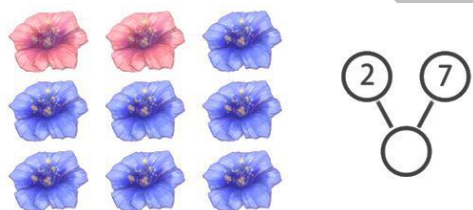
### 條目範圍

1. 一年級不處理直式記錄(N-2-2)，不做加數、被加數、減數、被減數未知的應用題(N-2-3)，只做「和」或「差」未知的應用解題。此皆和《九年一貫課綱》不同。
2. 在加減法中也要處理「0」。學習0的運算，最自然的情境是減法。例如「教室中有8個學生，他們都離開後，教室還剩多少人？」用減法算式記錄時，必須寫成  $8-8=0$ ，表示「沒有人」。再以此為基礎，理解「某數+0」「0+某數」或「某數-0」其結果都不變。「0」的加減處理，是日後直式計算基礎的一部份。由於這個約定很自然，不需過份評量。
3. 課本或教學應含加減法應用解題並陳之單元，使學生能主動理解問題，察覺加法和減法問題的差異。
4. 一年級雖不處理加減互逆關係(R-2-4)，也無對應的解題活動(N-2-3)。但仍應透過某些活動如「基本加減法」(N-1-3)，讓學生感受加減關係，作為二年級學習的先備經驗。
5. 在一年級先不處理「相差多少」的問題，在二年級才進行這類型問題的教學(N-2-2)。

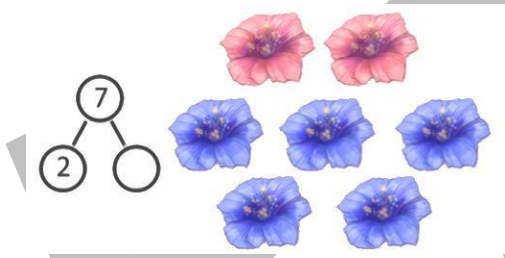
### 釋例

1. 數的合成分解經驗是加減法的先備經驗：

(1) 例 1：合成的例子：2 和 7 合起來是多少？可以用下列圖示記錄：



(2) 例 2：分解的例子：7 可以分成 2 和多少？可以用下列圖示記錄：



2. 透過不同情境(如併加、添加、拿走、比較型)，理解加法和減法的意義。

(1) 例 1：加法問題的題型：

加法的情境可以區分為併加型問題和添加型問題兩類。其中併加型問題比較簡單，可視為理解加法算式的原型（即「合成」），建議教師首次引入加法算式，必須是併加型問題。

- 併加型問題：池塘裡有 5 隻小鴨，岸上有 2 隻小鴨，一共有幾隻小鴨？
- 添加型問題：弟弟有 3 個蘋果，媽媽再給他 3 個蘋果，現在弟弟有幾個蘋果？

就解題活動而言，併加型和添加型是加法問題（將兩堆物件合起來點數確定數量），就解題記錄而言，這兩類問題都要用加法算式記錄。

(2) 例 2：減法問題的題型：

減法的情境可以區分為拿走型（即分解型）問題和比較型問題兩類。其中拿走型問題比較容易理解，可視為理解減法算式的原型（即「分解」），建議教師首次引入減法算式，必須是拿走型問題。

- 拿走型問題：池塘裡有 8 隻小鴨，其中 3 隻走上岸，池塘裡剩下多少隻小鴨？
- 比較型問題可再分為兩類：
  - 比較型問題（原型）：王老先生養了 8 隻白羊，5 隻黑羊，白羊比黑羊多幾隻？
  - 不同單位的比較型問題：有 8 個小朋友和 5 頂帽子，一人戴一頂帽子，帽子多還是人多？多多少？

就解題活動而言，上述三個題型很不相同，如下列解題圖示：

- 拿走型問題之解題圖示。教室裡有 5 位小朋友，走了 3 位，剩下幾位？



$$5 - 3 = \underline{\quad}$$

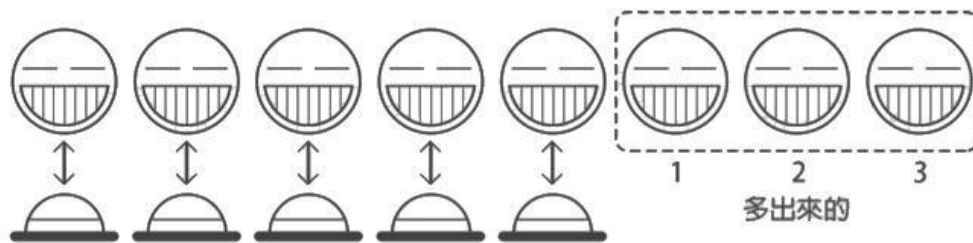
（《部》第一冊課本 P.61）

- 比較型問題（原型）之解題圖示：7 隻瓢蟲比 3 隻金龜子多幾隻？



- 不同單位的比較型問題解題圖：8 個小朋友，5 頂帽子，一人戴一頂帽子，帽子

多還是人多？多多少？



(3) 例 3：其他題型，也參考 N-2-3。

除了以上常見問題類型外，透過序數結合加減的問題也會出現在日常應用，舉例如下。

- 爬樓梯比賽，王先生到了 10 樓，又向上走了 1 樓，現在他在第幾樓？
- 李小姐從百貨公司的 11 樓向下走 2 樓到童裝部，童裝部在幾樓？
- 阿姨排隊買票，她的前面排了 17 個人，阿姨排在第幾個？
- 排隊結帳，林叔叔排在第 12 個，媽媽排在林叔叔前面第 3 個，媽媽排在第幾個？
- 多多少、少多少和相差多少？同一個比較型的情境，常有三種不同的問法：

■例：農場裡面有 10 隻白羊和 7 隻黑羊，問：

誰多？多幾隻？誰比誰多幾隻？（易）

誰少？少幾隻？誰比誰少幾隻？（稍難）

白羊和黑羊相差幾隻？（二年級再出現）

上述第 3 種問法中的「相差幾隻」是絕對值的概念，「白羊比黑羊多 3 隻」、「黑羊比白羊少 3 隻」，都是「相差 3 隻」，小一學生不易理解。建議一年級先布「多幾隻」的問題，再布「少幾隻」的問題，二年級才處理「相差幾隻」的問題。

3. 初步認識橫式算式與符號（參見 R-1-1）：

(1) 例 1：「哥哥有 7 顆彈珠，弟弟有 6 顆彈珠，兩人合起來共有多少顆彈珠？」

首先學生從題意判斷這是加法問題，當學生透過數數算出「7 顆彈珠和 6 顆彈珠合起來是 13 顆彈珠」後，要求學生將解題活動和結果記成「 $7+6=13$ 」。學生應充分理解這個算式記錄了「這個問題是什麼類型的問題(加法)」、「問題是什麼(7+6)」、「答案是什麼(13)」這三個重點。

(2) 例 2：「盤子裡有 8 片餅乾，弟弟吃了 3 片，盤子裡剩下幾片餅乾？」

學生先從題意判斷這是減法問題，當學生能透過數數算出「8 片餅乾，吃了 3 片，剩下 5 片」後，要求學生將解題活動和結果記成「 $8-3=5$ 」。學生應充分理解這個算式記錄了「這個問題是什麼類型的問題(減法)」、「問題是什麼(8-3)」、「答案是什麼(5)」這三個重點。

(3) 擬題活動：

為了加強學生理解加、減法算式的意義，可以透過擬題活動來協助。例如教師先列出加法算式「 $5+3=8$ 」或「 $8-3=5$ 」，再要求學生擬出符合該算式的相關文字題，檢查學生是否掌握加、減法算式的意義。

擬題活動的進行須注意：

- 須在學生已能順利進行加、減法應用問題的解題、列式，並對加、減法算式的意義和紀錄格式熟練後才進行。

- 進行擬題時，學生以口語表達即可，不宜要求以文字描述。
  - 學生的擬題只要是併加型、添加型或拿走型的情境即可。
- (4) 加減法計算的學習過程有很多方式，最根本的基本加減法範圍內的學習，請見 N-1-3 釋例的說明。其後的二位數加減法，應從數數能力、位值概念、合成分解模型入手。
- 二位數的加減法而其加數或減數為一位數或整十的情形：
    - 加一位數：運用 N-1-1 釋例 (6) 從一數開始順數的能力解題。
    - 減一位數：運用 N-1-1 釋例 (6) 中從一數開始倒數的能力解題。
    - 加幾十：運用 N-1-1 釋例 (6) 從一數開始「多十」順數的能力解題。
    - 減幾十：運用 N-1-1 釋例 (6) 從一數開始「少十」倒數的能力解題。
  - 一般二位數加減法：透過具體物（位值積木、花片）的操作來理解二位數加或減二位數的方法。一年級的二位數加減法不以計算的熟練為目的，教師應將重點放在學習「如何在位值系統中進行加減法」。
    - 二位數加二位數（不進位）：這是合成分解模型的簡單應用。

2 18加21等於多少？



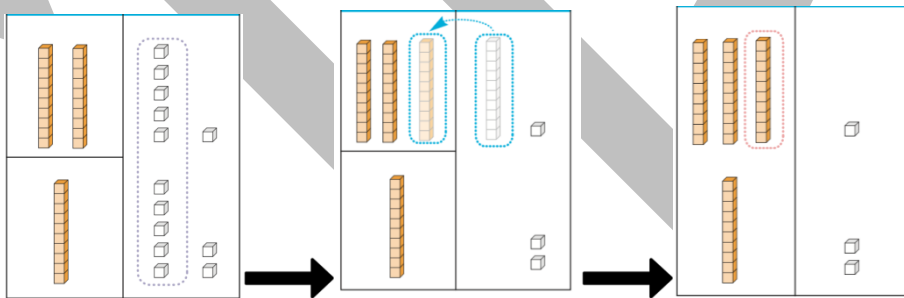
加

算式： $18 + 21 =$  \_\_\_\_\_

先算  $8 + 1 = 9$ ，  
再算  $10 + 20 = 30$ ，  
最後把  $9$  和  $30$  相加。

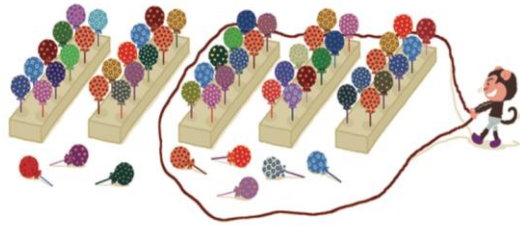
(《部》第二冊課本 P51)

- 二位數加二位數（進位）：進位時要用到 10 個 1，可換成 1 個 10。  
例： $26 + 17 = 43$ 。



- 二位數減二位數（不退位）：這也是合成分解模型的簡單應用。

4 58減35等於多少？

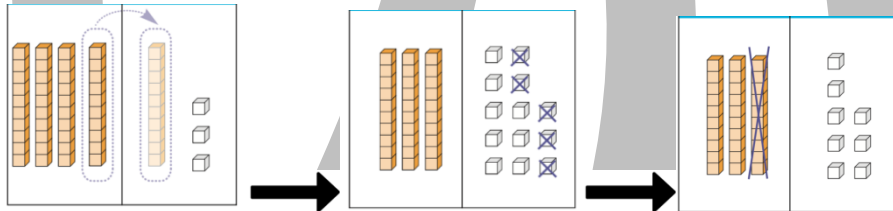


先算8-5，再算50-30，  
把前面兩個算式的答案相加。

算式： $58 - 35 =$  \_\_\_\_\_

(《部》第二冊課本 P78)

- 二位數減二位數（退位）：退位時要用到1個10，換成10個1。  
例： $43 - 15 = ?$



### 錯誤類型

誤將不同類量作加減計算。

- (1) 例 1：1 枝鉛筆 5 元，小明買 2 枝鉛筆，共要花多少元？學生誤列「 $1+5=6$ 」、「 $5+2=7$ 」或「 $1+2=3$ 」等錯誤算式。
- (2) 例 2：一條船上有 35 頭牛，14 頭羊，問船長幾歲？學生逕行列出「 $35 + 14 = 49$ 」或「 $35 - 14 = 21$ 」得出荒謬解答。
  - 建議：教師請學生說明或解釋算式，以澄清觀念之錯誤處。
- (3) 以題幹先出現的數為被減數，列出錯誤減法算式。（另一原因見 R-1-2）  
例：小明有 3 元，小華有 5 元，小華比小明多幾元？學生列成「 $3 - 5 = 2$ 」。  
  - 建議：除確認學生了解題意外，應重申「被減數」比「減數」大的約定。
- (4) 學生做減法問題，知道答案是「沒有」，但未寫成 0。如「 $8 - 8 =$  \_\_\_\_\_」  
  - 建議：強調「沒有」記成「0」的約定。

### 評量

1. 評量重點：

- (1) 能解決「添加」、「併加」、「拿走」、「比較」各型應用問題。
- (2) 能針對應用問題，列出正確橫式算式，並說明問題與算式的關係。
- (3) 能計算加法與減法的算式問題，進而協助解決應用問題。
- (4) 能從加法與減法算式擬出對應的生活應用情境問題（參考釋例(4)）。

2. 注意事項：

- (1) 本條目在一年課程中宜分成多個單元進行，要注意數量範圍的合理性與題目類型是否適宜，如較大數加減法或「比較型」問題宜在一年級下學期。
- (2) 解題的想法可能有多種，只要合理即可。
- (3) 解題的計算方法要符合學生能力，但也應在學生理解且有能力時，要求以較簡潔的方式解題，化繁為簡讓學生逐步提升解題能力。

- (4) 應用問題的解題，應列成橫式算式並應寫「答」，「答」中的答案要含單位（除非特定問題無單位），養成完整的答題習慣。

<p><b>N-1-3 基本加減法：</b>以操作活動為主。以熟練為目標。指 1 到 10 之數與 1 到 10 之數的加法，及反向的減法計算。</p> <p><b>補充說明：</b>在過程中可能用到兩步驟加減混合數算，這是自然延伸之計算策略與數感，應予以鼓勵。</p>	n-1-2
---	-------

連結：N-1-2、N-1-4。

後續：N-2-2。

### 基本說明

基本加減法主要是類似「十十乘法」的「十十加法」（及相應減法），其中尤其強調「合十」的重要性。藉由熟練小數字的加減法，可以增強學生的簡單心算能力與信心，除了協助一年級較大數字之加減法計算，更是二年級之後直式計算的基礎（四則直式計算都會用到基本加減法）。

(1) 基本加減法的教學必須注意下列事項：

- 在操作活動中進行，直到學生熟練，而不是強行背誦。
- 鼓勵學生獨立思考，算法容許多樣化。
- 注重與生活的連結，培養學生應用基本加減法的意識。
- 採用多種練習方式，激發學生學習興趣。

(2) 熟練的意思是，能夠完全不用數數就知道答案。教師應配合各種活動或遊戲，寓教於樂，讓學生自然熟習（見底下釋例），不要單純死背。

(3) 基本加減法包括：「合 10」與「拆 10」；其他十十加法與對應之減法。另外也可將加 1 與減 1；加 10 與減 10；視為基本加減法。

(4) 由於這是操作活動，在過程中若「遊戲」布題自然用到多步驟加減混合計算（「7 加 8 是多少？再減 5 呢？」、「三個 4 加在一起是多少？」），或學生計算時運用「合 10」與「拆 10」於加減問題，應視為自然延伸之計算策略與數感，予以鼓勵，而非抑制。

### 條目範圍

基本加減法的練習，應該從學習加減法之後開始，遍及一年級的數學教學。（猶如二年級的十十乘法）。

### 釋例

1. 「基本加法」指的是一位數加一位數的加法（如下圖），「基本減法」指的是一位數減一位數及十幾減一位數的減法。透過簡單的分與合活動，學生在基本加減法的範圍，應透過基本加減法熟知加法和減法的關係。




1+1=2	2+1=3	3+1=4	4+1=5	5+1=6	6+1=7	7+1=8	8+1=9	9+1=10
1+2=3	2+2=4	3+2=5	4+2=6	5+2=7	6+2=8	7+2=9	8+2=10	9+2=11
1+3=4	2+3=5	3+3=6	4+3=7	5+3=8	6+3=9	7+3=10	8+3=11	9+3=12
1+4=5	2+4=6	3+4=7	4+4=8	5+4=9	6+4=10	7+4=11	8+4=12	9+4=13
1+5=6	2+5=7	3+5=8	4+5=9	5+5=10	6+5=11	7+5=12	8+5=13	9+5=14
1+6=7	2+6=8	3+6=9	4+6=10	5+6=11	6+6=12	7+6=13	8+6=14	9+6=15
1+7=8	2+7=9	3+7=10	4+7=11	5+7=12	6+7=13	7+7=14	8+7=15	9+7=16
1+8=9	2+8=10	3+8=11	4+8=12	5+8=13	6+8=14	7+8=15	8+8=16	9+8=17
1+9=10	2+9=11	3+9=12	4+9=13	5+9=14	6+9=15	7+9=16	8+9=17	9+9=18


此圖不見得要出現在教科書。



(1) 建議讓學生透過多樣的活動熟練基本加減法，底下是一些可能的活動：

● 全部點數：這是最基本也是最初的加減法活動，運用數數的能力。

■ 以 3+5 為例，分別拿出 3 個花片、5 個花片，從頭由 1 開始點數全部的花片（一次點數），得到 8 的答案。


 3 隻小鴨在池塘裡，5 隻小鴨在草地上，一共有幾隻小鴨？

用  表示小鴨。

 加 


算式： $3 + 5 =$  \_\_\_\_\_


一共有 \_\_\_\_\_ 隻小鴨。





（《部》第一冊課本 P.41）

■ 以 5-3 為例，先畫出 7 個圓圈，再由原先畫出的 7 個圓圈中，畫掉要拿走的 7 個圓圈。最後點數剩下的圓圈，得到剩下 0 的答案。


 圖書館裡有 7 個小朋友，走了 7 個，剩下幾個？

用  表示小朋友。



算式： $7 - 7 =$  

剩下 \_\_\_\_\_ 個。

 剩下 0 個，表示小朋友都走光了。

（《部》第一冊課本 P.60）

■ 向上數：以 7+3 為例，口中唸「7」，伸出 3 根手指，從 7 開始順數 3 得「8、9、10」，得到 10 的答案。

1 王先生從百貨公司的 7 樓向上走 1 樓到書店，書店在幾樓？

算式： $7 + 1 = \underline{\quad}$



書店在      樓。

(《部》第一冊課本 P.42)

- 向下數：以  $8-3$  為例，口中唸「8」，伸出 3 根手指，從 8 開始倒數 3「7、6、5」，得到 5 的答案。

1 王先生從百貨公司的 8 樓向下走 1 樓到書店，書店在幾樓？

算式： $8 - 1 = \underline{\quad}$



書店在      樓。

(《部》第一冊課本 P.62)

● 合 10：

- 探索哪兩個數合起來是 10 的活動。透過圖形觀察算式的變化規律。在和 10 活動中學生應十分熟悉 10 的合成與分解。



$1 + 9 = 10, 10 - 1 = 9, 10 - 9 = 1$

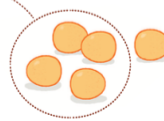


$2 + 8 = 10, 10 - 2 = 8, 10 - 8 = 2$

- 以  $6+5$  為例，透過「合 10」的經驗來找出答案。例如：



加

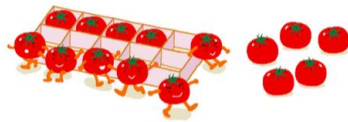


算式： $6 + 5 = \underline{\quad}$

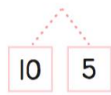
(《部》第一冊課本 P.28)

- 以  $15-6$  為例，透過「合 10」的經驗來找出答案。例如：

1 15個番茄吃了6個，還剩下幾個？



算式： $15 - 6 = \underline{\quad}$



把15分成10和5，  
5不夠減6，  
先算 $10 - 6 = 4$ ，  
再算 $5 + 4 = 9$ 。



剩下 9 個。

(《部》第一冊課本 P.30)

● 同數相加：

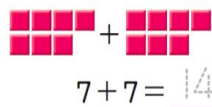
■ 被加數和加數是相同的數，讓學生運用模型進行兩數相加的活動，觀察模型和數字的變化規律。例如：

1		$1 + 1 = 2$	6		$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$
2		$2 + 2 = \underline{\quad}$	7		$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$
3		$3 + 3 = \underline{\quad}$	8		$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$
4		$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$	9		$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$
5		$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$	10		$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$

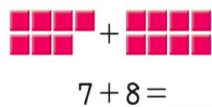
(《部》第一冊課本 P.78)

■ 利用同數相加的事實來做加法。例如：

2  $7 + 7 = 14$ ，那麼  $7 + 8$  是多多少呢？



$7 + 8$  比  $7 + 7$  多 1。



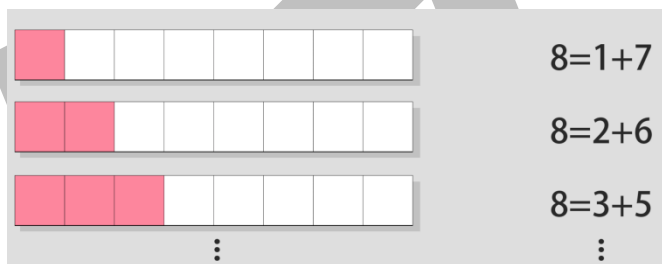
多了 1 個。

(《部》第一冊課本 P.79)

2. 基本加減法中的加減關係：當學生用以上方法熟悉基本加減法後，再透過恰當的「遊戲」，就可以熟練基本加減法中的加減關係，作為二年級加減互逆的前置經驗。  
例：下圖黃框中的數加起來是紅框中的數，在空的位置填入恰當的數字。



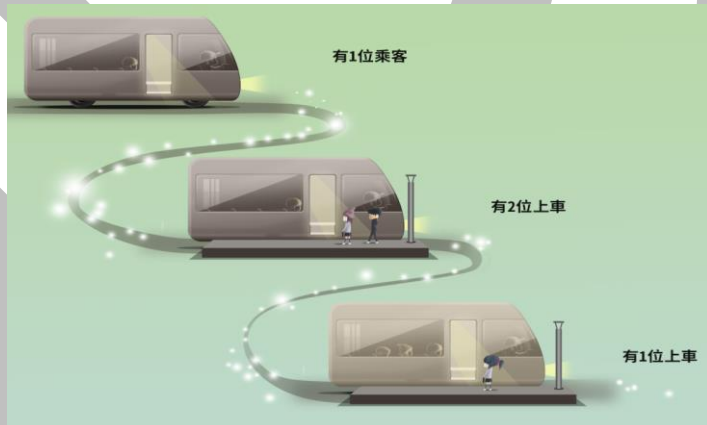
- (1) 在恰當教學單元中，可讓學生初步體會「等號」兩邊相等的意義。  
 例如：哪兩個數合起來是 8？可以藉由下列圖示搭配算式紀錄來表示：



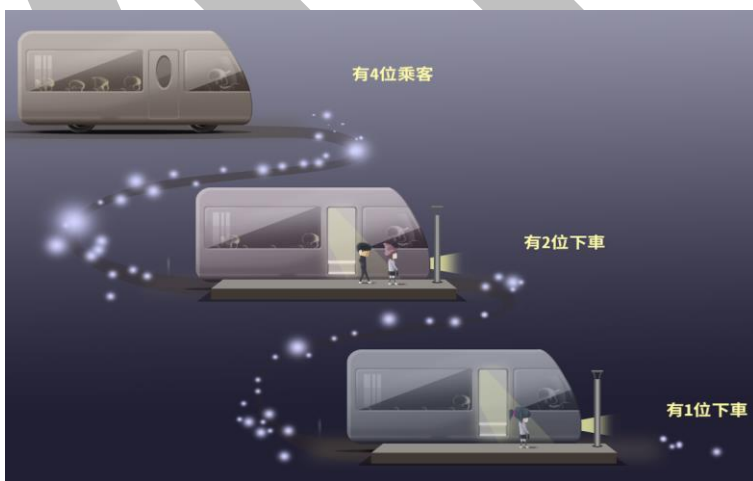
這樣的紀錄格式，建議在學生已經熟悉  $1+7=8$ 、 $2+6=8$ 、 $3+5=8$  的格式及計算之後才引入，通常安排在下學期的課程。

- (2) 透過操作活動，可以用遊戲或故事情境的方式進行多步驟的加減混合計算。引導學生用心算、花片、畫圈等方式模擬真實情境，達到熟練基本加減法的目標，但不出現算式紀錄。

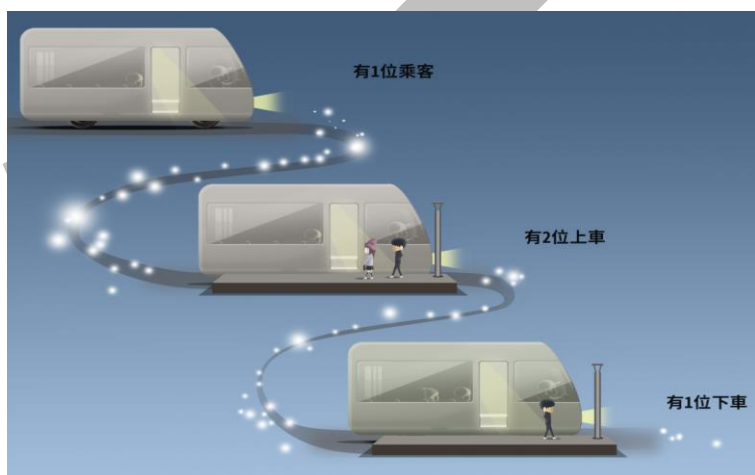
● 例：用上下公車的情境問各種混合計算的問題。



連加情境



連減情境



加減混合情境

- 例：將學生兩兩分組，進行類似如下的挑戰遊戲。  
「3 加 7 是多少？再減 4 是多少？」  
「4 個 3 加在一起是多少？」  
「1 加 2，再加 3，再加 4 是多少？」
- (3) 底下是一些可以用來做心算練習的活動。

- 十格板：利用十格板和花片做基本加減法。



- 心算卡遊戲
  - 例：從心算卡中找出和為 9 的心算卡，並找出被減數為 11 的心算卡，排排看，可以看到什麼規律。
- 用撲克牌遊戲玩「合十」。

### 錯誤類型

學生執著使用某些計算方式（如「數手指頭」「全部點數」），計算繁複可能發生錯誤。

- (1) 例：計算  $3+7$ 。先數 3 個花片，再數 7 個花片，從頭再數一次得到答案 10。
  - 建議：教師在數的教學一開頭就要鼓勵學生要多元思考與練習，才能因應不同問題，選擇恰當的計算方式。如果直接強迫學生背誦對學生並沒有利。
- (2) 減法需退位時，發生「大數減小數」的錯誤。例如： $12-7$  算成  $17-2$ 。
  - 建議：回到具體操作或表徵解決原來問題。

### 評量

#### 1. 評量重點：

- (1) 能透過操作活動等逐步熟練加 1 與減 1；加 10 與減 10；「合 10」與「拆 10」最後能不透過數數，就流利得到答案。
- (2) 能透過操作活動等逐步熟練十十加法與反向之減法。

#### 2. 注意事項：

- (1) 在熟練的過程中，依照學生能力評量應從給予物件、圖示、遊戲或提示，到最後只出

現算式。

- (2) 熟練後可以算式、填空題、九宮格、心智圖、樹枝圖等多元方式，要求在限定時間讓學生完成計算。

<b>N-1-4 解題：</b> 1 元、5 元、10 元、50 元、100 元。以操作活動為主。數錢、換錢、找錢。 <b>補充說明：</b> 容許多元策略，建立數感。	n-l-3
---	-------

**連結：**N-1-1、N-1-2、N-1-3。

**後續：**N-2-5。

### 基本說明

1. 「用錢」是數學基本的日常生活應用，若配合位值概念的教學，能收相互強化之效。「用錢」的各種活動如數錢、換錢、找錢，通常都有多元的解題策略，讓學生發展自己的想法並彼此溝通，協助建立數感，是本條目的目標。
2. 用錢所牽涉的數學，如果變成單純的課堂教學，往往顯得過於形式或瑣碎，其中所牽涉到的數感訓練，應以實際情境的操作活動來進行，若能連結一年級其他條目整合進行更佳。例如簡單的買賣活動，學生輪流扮演買方或賣方，可以提高學生的學習興趣。
3. 可進行的活動包括：「數錢」——結合數數、位值、加法，甚至針對 5 元的「五個一數」；「換錢」——除了最重要，與「一」與「十」類似的 1 元和 10 元間的轉換之外，也包括 5 元和 10 元間的轉換（10 元相當於 2 個 5 元）、10 元和 50 元間的轉換（50 元相當於 5 個 10 元）；「找錢」——除了練習換錢（以 50 元找錢、10 元找錢）之外，也可以練習如何付錢（例如買定價 42 元的東西，可以付 52 元，找 10 元）。

### 條目範圍

1. 如前所述，讓學生發展多元的解答策略，是本條目的目標，因此切忌由教師灌輸單一解題策略，多引導讓學生發展其合理解題策略。
2. 可介紹 100 元鈔票，但只做 100 元與 50 元、10 元、1 元之間的兌換。（N-2-5）
3. 本條目重點是活動，目的在加強位值認識，不是加減法教學，教師不可要求學生將問題轉換成加減計算問題。例如在本條目活動中可解決相當於進位或退位的問題，但在一年級，除了基本加減法（N-1-3），並不作其他進退位的加減教學。
4. 本條目若做紙筆評量應注意到和加減問題作區隔，不要求學生列加減算式。

### 釋例

1. 錢幣與位值：錢幣是比較特別的教具，數學積木和數量是成比例的教具，但錢幣不是，例如 10 元硬幣的面積、體積或重量，都不是 1 元硬幣的 10 倍，有時會造成學生理解的困擾。學生應理解 1 枚十元硬幣和 10 枚一元硬幣等值是社會的約定，其他幣值的錢幣也一樣。
2. 錢幣的幣值介紹：
  - (1) 基本幣值（1 元、5 元、10 元、50 元和 100 元）介紹和兌換，包括：
    - 5 元、10 元、50 元和 100 元錢幣分別和 1 元錢幣的兌換。
    - 10 元錢幣和 5 元錢幣的兌換。
    - 50 元錢幣、100 元錢幣和 10 元錢幣的兌換。

- 100 元錢幣和 50 元錢幣的兌換。

3. 數錢：結合 5 個一數、10 個一數的方式，可以快速點數多枚以 5 元或 10 元為單位的元數。當錢幣數量較多時，引導學生有策略的數，先從幣值較大的錢幣數起，也可和加法向上數的策略結合。

(2) 例 1：皮包內有多少錢？用 10 個一數數 10 元硬幣；用 5 個一數數 5 元硬幣。



(3) 例 3：2 種錢幣的組合：



- 例 4：多種錢幣的組合：



4. 透過買賣活動，引起學習動機：例如上市場、去便利商店或文具店買東西的情境。碰到需要找錢或錢不足的狀況，避免變成用加減法算式來算，而是用實際換錢、數錢的操作讓學生有更多經驗。

(1) 例 1：「想買東西，錢夠嗎？」用點數來解決問題。

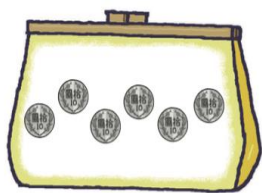
2 圓圓圓想買手錶，她的錢夠嗎？





圓圓圓的錢（夠，不夠）。

(2) 例 2：「可以怎麼付錢？」

4 圓圓想買一個水壺，她要付幾個才夠呢？



圓圓要付      個。

4個  不夠，要幾個  才夠？



(3) 例 3：買定價 42 元的東西，可以付 52 元，找 10 元。

(4) 例 8：用到換錢來買東西，拿 5 個十元去買 38 元的東西，先將 1 個十元硬幣換成 10 個一元硬幣再去買。

### 錯誤類型

混淆幣值單位(元、錢或個)

例：(加上圖示)錢包裡有 1 個 5 元和 3 個 1 元，總是多少錢(元)？學生誤答成 4 個錢或 8 錢。

建議教師教學時避免問多少錢？宜改問多少「元」？學生若錢幣之單位「元」時「個」時，建議透過買賣活動安排數錢、換錢、找錢等「用錢」之生活應用，再配合位值概念的教學，以收相互強化之效。

(1) 混用錢幣圖示與位值表徵：

例：要將 5 個十元表徵在位值表上。

● 建議教師與學生溝通，位值表上要記錄一個數字，而且每一格上都只能記一位數字，而非記錄...

(2) 錢幣屬非等比例視覺型換算，不宜用於位值表中的表徵，易造成進退位造成混淆。

### 評量

1. 評量重點：

(1) 能認識 1 元、5 元、10 元、50 元、100 元的硬幣或鈔票。

(2) 能透過操作，結合數數、位值、加法等進行數錢。

(3) 能透過操作，結合幣值間的等值關係進行換錢活動。

(4) 能透過操作，進行「付錢」和「找錢」等「用錢」的活動。

2. 注意事項：

(1) 本條目以操作為主，評量需配合相關的教具，採用紙筆評量時題目應包含錢幣圖示，讓學生透過畫記或圈選等方式回答用錢的問題。

(2) 「用錢」的活動不列加法(減法)算式，除「數錢」外「換錢」、「付錢」、「找錢」的答案呈現方式常常不只一種。

(3) 不做超過 100 元以上的「用錢」活動。

(4) 不宜評量：用 10 元 1 元做位值表表徵，參考錯誤類(3)。



<p><b>N-1-5 長度 (同 S-1-1):</b> 以操作活動為主。初步認識、直接比較、間接比較 (含個別單位)。</p> <p><b>補充說明:</b> 含直線與曲線。無常用單位。</p>	<p>n-l-7</p>
---	--------------

**連結:** N-1-1、N-1-2。

**後續:** N-2-11。

### 基本說明

1. 「數」透過「量」應用到日常生活。離散量五花八門，這些單位為「個」、「顆」、「隻」等等的數量與數數密切相關，通常融合在「(整)數」課程中教學。連續量包含和視覺相關的幾何量——「長度」、「角度」、「面積」、「體積」、「容量」，以及其他量如「重量」與「時間」，將會分散於各年級教學，循序漸進，其中尤以長度最為基礎和直觀易學。一年級學習的量為「長度」(本條目)與「時間」(N-1-6)。
2. 長度是學生最早學習的連續量，具有指標作用，又是數線與小數概念的入口，教師應完整處理此細目，以利後續相關學習之流暢。由於連續量除了日常應用，也與自然科學應用相關，必須藉由實際觀察與操作活動，認識長度的意義(「長短」、「高矮」等)，再學習如何比較物體長短的各種方法，其活動應包含「認識長度」、「直接比較」、「長度複製」、「間接比較」、「個別單位」。較困難的長度基本概念活動，見 N-2-11。
3. 直接比較：把兩(細長狀)物，固定一端，再比較另一端的位置(這和數的比較方式一致)。透過繩索等曲線類物體，學習在比較長度時，必須先拉直後才做比較。透過直接比較，理解「複製長度」的長度相等意涵。
4. 間接比較：甲、乙兩物不(能)直接比較，透過先將甲長度複製，再拿去與乙比較。
5. 個別單位與比較：學習如何透過身邊的「個別單位」(如：手臂長、掌幅、步幅、紙條、筆、橡皮擦、書長、迴紋針等)，測量一物的長度。並以此方法測量兩物長度，再結合數的比較來比較兩物的長短。我們強調學生要在實際操作中，確定這個方法適用。
6. 利用「單位」做測量而得到「長度」的量，讓「長度」與「數」的教學產生密切連結。除了比較之外，本條目也應處理長度的合成分解活動(加減法)，作為長度加減(N-2-11)與數線加減(N-3-11)的先備經驗。例如討論兩繩接起來的「長度」和各別的「長度」的關係，或討論一繩剪斷後，繩子原長度，和部分長度的關係。
7. 學生應知道測量長度時，應該找方便而恰當的「單位」。例如測量教室的長度，用步幅為單位比用迴紋針恰當。讓學生討論為什麼某些「單位」比較方便或恰當。
8. 從操作活動的教學中，建立「距離」的認知，以利日後的溝通。從操作活動的教學中，察覺兩點之間的線(繩子)，以直線為最短；兩點之間以直線距離最短。

### 條目範圍

1. 教學中要包含直線物與曲線物，以方便學生處理為原則。
2. 不做常用單位如「公分」、「公尺」的教學。(N-2-11)
3. 運用「個別單位」測量時，經常會出現無法剛好的情況，只需要運用「長一點」、「短一點」、「大約」等口語即可。
4. 在基本說明(5)的活動中，可能會觸及較長的「單位」量出來的「長度」會比較小的議題。但這不是一年級學生必要學習的內容，教師斟酌現場情況處理即可。(見 N-2-11)
5. 留意長度保留認知尚未充分發展的學生，在多次經驗後，讓學生知道同一物長度在各種時空移動中不會改變。

### 釋例

1. 長度的初步認識與直接比較：「長短」、「高低」等長度用詞需透過直接比較才能真正理解，教師也比較容易說明「長度」的意思。
  - (1) 初步介紹長度：教師引導學生認識長度教學經常使用的工具，如鉛筆、繩子、黑板的

邊緣、長方體盒子的邊緣等。教師以指尖沿物品一端徐徐移動至另一端，強調直線段「長度」之認識。

(2) 直接比較：不透過媒介物而將兩個(或多個)個物直接作比較。

- 物品兩端未對齊，但有包含關係。這是最直接而直觀的比較。

例：下面兩輛車子，哪一輛比較長？



- 典型的長度直接比較：先對齊比較物的一端，再比較另一端位置的遠近，直接比較二物的長短。

■ 例 1：比較左圖三條紙條的長度？（圖示物品靠右對齊）



■ 例 2：誰比較高？



- 曲線物的長度比較：教師引導學生先將曲線物體拉直後才比較。

■ 例：讓學生進行二條彎曲繩子的長度比較？

藉由各種行度直接比較的討論，豐富與「長度」相關的語彙如長短、遠近、高矮、厚薄、粗細。

2. 長度的複製：將一物長度仿製到另一物上，藉由直接比較，知道其等長相等。複製是長度教學的重要操作與工具。

(1) 完整複製：這是最基本的長度複製。

- 例 1：以繩子剪出和書桌指定邊等長的段落。

- 例 2：在木條或繩子上做記號，使一端至記號處和原物等長。

(2) 長度的合成與分解：將一繩子剪斷成兩段，則兩小段繩子前後相接的長度，會等於原繩的長度，表示「兩小段繩子長度可合成原繩長度」或「原繩長度可分解成兩小段繩子長」。長度的合成與分解是長度的基本性質，和個別單位測量、長度加減法都有關。

(3) 累積複製：利用長度的合成性質，用不同物件頭尾相接成一線，此線長度和被複製物等長。其中最重要的特殊情況，是使用許多全等物件（如迴紋針、鉛筆，等長繩段）的累積複製。這種以同一物件的累積複製是個別單位比較的基礎。



(4) 彎曲物的長度：

彎曲物如水桶的把手、圓罐的周界、身體的腰圍、樹圍等，都可以利用柔軟的繩子去複製，拉直後做為彎曲物的長度。

(5) 長度的間接比較：當要比較的兩物無法使用直接比較時，可複製其中一物的長度，再將複製物與另一物作直接比較，這種比較稱為「間接比較」。間接比較是使用器械測量長度的基礎。

例：「學校 A、B 兩棟大樓的裡的教室黑板是不是一樣長？」

因為無法將 A 大樓教室的黑板搬到 B 大樓去直接比較，所以先拿一條繩子把 A 大樓教室黑板的長邊複製下來，再拿去 B 大樓和那邊的黑板的直接比較。

3. 長度的個別單位測量：

(1) 個別單位測量：藉由釋例 (2) 中以同一物件累積複製的想法，選定一個物件甲作為測量的 (個別) 單位，進行累積複製再點數所需的物件數目，就是該物體以此物件甲為單位的長度。例如釋例 (2) 中藍色長方形的一邊是「7 個迴紋針長」。

(2) 使用個別單位測量長度時，經常無法剛好量完。基於學生數學經驗不足，對於多一點或少一點的情況，可用「大約」一詞帶過。

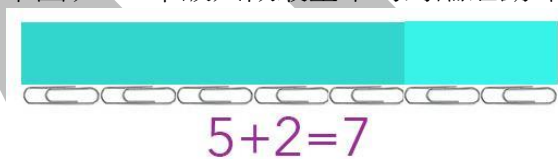
(3) 為了避免用太小的單位量太大的東西 (或反過來)，如何選擇恰當的個別單位，是學習長度的重要課題，也是學生長度量感的一部份。鼓勵學生從身邊常見物選用恰當單位，如指幅、手叉、步幅、二手張開之長、迴紋針、小白積木、橘色積木等。

4. 長度的個別單位比較：以選定的個別單位，測量兩比較物，再以所得兩物長度做比較。透過個別單位的測量，把長度量轉化為數，把長度比較轉化為數的比較 (N-1-1)，建立了數和量的密切關係。

例：續釋例 (3) 「A、B 兩棟大樓教室的黑板長度比較」。

準備長度相同的繩子當做個別單位，測量後 A 大樓黑板為 6 段長，B 大樓黑板為 8 段長，8 比 6 大，所以 B 大樓教室黑板比較長。

5. 長度的加減：利用個別單位的測量，可以將長度的合成和分解，轉化成數的加減問題 (如下圖)。一年級只做最基本的討論活動即可。



例：將一繩 A 剪成兩段 B 和 C，若用指幅作為個別單位測量，得 A 長為「13 指幅長」，B 長為「8 指幅長」，則 B 的長度為  $13 - 8 = 5$ ，是「5 指幅長」。

6. 關於長度保留概念的小叮嚀：所有以上的長度概念，都奠基於一個長度保留的假設：「長度是不變的」，如此長度概念才有意義，長度的複製、以複製做間接比較、長度的合成分解、以個別單位測量等等才都有意義。長度保留是人類認知發展的一部份，因此教師不需強行教導，只要長度單元的教學充份而多元，許多學生都不會有問題。但教師仍應觀察在長度學習上較遲緩的學生，注意學生是否有這方面的問題。認知較遲緩不是錯誤，也不是學習力有問題，只要教師能寬容等待，大多數學生最後會自然跟上。

### 錯誤類型

1. 直接比較時 (除了包含的情況)，一端未對齊，逕行比較另一端位置。  
建議：用生活化的例子 (如佔不同台階比較身高) 提醒學生。
2. 曲線未拉直，以為曲線的長度比直線短。  
建議：比較拉直的繩子，將較長繩彎曲「變短」，讓學生領會其錯誤。
3. 許多學生犯錯是因為「保留概念」未成熟，見釋例 (7)

### 評量

1. 評量重點：

- (1) 能從日常生活情境初步認識長度。
- (2) 能透過操作進行長度的直接比較。

- (3) 能透過操作進行長度的間接。較（含個別單位）。
- (4) 能運用方便而恰當的長度「個別單位」進行測量和比較。

2. 注意事項：

- (1) 在做比較時，要將比較物件（如繩子）擺直比較，有彈性的物件可暫不在此處處理。
- (2) 直接比較時提供至少一個可移動的長度物件。
- (3) 間接比較需透過複製再比較，若要採用紙筆評量，評量時除題目中的圖示外，應提供適宜做長度複製的物件，以供操作解題。

<p><b>N-1-6 日常時間用語：</b>以操作活動為主。簡單日期報讀「幾月幾日」；「明天」、「今天」、「昨天」；「上午」、「中午」、「下午」、「晚上」。簡單時刻報讀「整點」與「半點」。</p> <p><b>補充說明：</b>以教師和學生在教室中溝通之時間用語為原則。非時間單位結構之教學。簡單日期指日曆之「幾月幾日」，不含曆法結構。時刻以鐘面教學。簡單鐘面時刻限「整點」與「半點」。</p>	<p>n-1-9</p>
--	--------------

連結：N-1-1。

後續：N-2-13、N-2-14。

**基本說明**

1. 時間是另一種常用量，但是在學習上比較抽象，更因為時間的應用情境與時間單位換算都比較複雜，因此時間量的學習將遍及整個小學階段。
2. 由於時間無法重來，許多在幾何量常用的認識與比較方法（見 N-1-5），受到很大限制，學生也不易體會。因此時間教學與計時工具的使用密切相關。另外，一年級時間教學，首重日常時間用語的學習，以利教師日後在各科教學之溝通。
3. 在可以比較的情況（同時開始的事件如賽跑、計時競賽），學習「時間比較長」、「時間比較短」的用法。利用故事與日常經驗結合，讓學生分辨事件發生的「先」、「後」。這些比較用語，前者和事件時間長短（時間量）有關，後者和事件發生的時刻有關，這是兩種時間應用的原型。另外，建立一定時間量感後，可討論如「刷牙時間比吃一頓飯時間短」之類的比較。
4. 由學生的活動與睡眠起居經驗，學習使用「明天」、「今天」、「昨天」等時間用語，知道其先後順序。接著擴展其理解，以月曆或日曆讓學生簡單報讀「今天」、「昨天」、「明天」是「幾月幾日」或「星期幾」。
5. 以各種生活經驗（太陽起落、天空亮暗、吃飯時機等），學習「上午」、「中午」、「下午」、「晚上」等時間用語。
6. 用鐘面學習簡單時刻報讀，以「整點」與「半點」為限。再連結（5），學習使用「上午9時」、「晚上7點半」的用法。
7. 以上（5）和（6）的學習中，可用鐘面工具問學生指定時刻的前（或後）1（或2）小時的時刻。若溝通清楚，也不妨用日曆、月曆等問學生「前1天是幾月幾日」之類的問題。

**條目範圍**

1. 一年級的教學重點，以師生在教室溝通之時間用語為主要原則。不做時間單位結構之教學。（大單位見 N-2-14、小單位見 N-3-17。）
2. 簡單日期指日曆之「幾月幾日」，不含曆法結構教學，也不處理月曆或年曆上的模式（N-2-14）。簡單時刻指「整點」與「半點」，不處理其他時刻（N-2-13），也不處理 24 小

時制 (N-4-13)。

3. 基本說明 (7) 的教學只限於很簡單的情況，讓學生知道時刻和「數」之間的連結即可，前或後之數字以 2 為限，尤其不可碰觸週期性約定的邊緣（如「3 月 31 日下一天是幾月幾日」、「晚上 11 點睡覺，1 小時後是幾點。」）。(N-2-14、N-4-13)
4. 依照師生溝通的原則，「中午」、「晚上」一詞在此不需有嚴格定義。
5. 「上午 12 點 vs. 下午 12 點」之溝通：對於端點時刻牽涉到溝通約定，於此階段，建議暫不碰觸。
6. 電子鐘：若學校使用電子鐘，建議盡量調成非 24 小時制。教師可告知「幾時幾分」的溝通約定，但不做其他教學。

### 釋例

1. 從日常經驗，學習「先」、「後」，「長（久）」、「短」的日常用語。
  - (1) 例 1：運用學生熟悉的生活情境，讓學生討論並比較生活事件（「起床」「吃早餐」「上學」「吃中餐」等）發生的先後。確定學生會正確使用「先」「後」的語詞。
  - (2) 例 2：運用學生熟悉的生活情境，讓學生討論並生活事件所花時間的長短。教師應選擇容易分辨時間長短的事件，如「刷牙和洗澡」、「戴帽子和穿外套」。
2. 認識「明天」、「今天」、「昨天」、「幾月幾日」或「星期幾」等時間用語
  - (1) 從學生的日常生活入手，討論學校或家裡「明天」、「今天」、「昨天」的活動。
  - (2) 以月曆或日曆為工具，報讀「明天」、「今天」、「昨天」是「幾月幾日」以及「星期幾」。
  - (3) 以月曆報讀請學生回答一些簡單的日期問題（如假期、生日），但不牽涉到月曆的結構。
  - (4) 學生應認識「明天」、「今天」、「昨天」是相對於今天的時間用語，但日期則是「絕對的」。
  - (5) 教室中應佈置月曆，作為日常溝通之用，並鼓勵學生觀察和探索。
3. 認識「上午」、「中午」、「下午」、「晚上」等時間用語：從學生的日常生活經驗入手，知道太陽高掛頭時是「中午」，之前是「上午」，之後是「下午」，天黑睡覺時間是「晚上」。
4. 簡單時刻報讀。
  - (1) 老師教導學生如何看鐘面，學生能從長針和短針的位置讀出「幾點」或「幾點半」。



1 點



2 點



3 點半

- (2) 配合鐘面知道中午 12 點之前是「上午」，之後是「下午」。也能結合釋例 (3)，使用「上午 9 點」、「下午 4 點」、「晚上 7 點半」的時間用語。
- (3) 不必強調「中午」的嚴格定義，尤其不要說中午就是 12 點。
- (4) 由於缺乏精確的鐘面教具，為避免誤導學生的學習，建議若想進行撥鐘教學應只限於教師示範。事實上一年級的時刻教學，撥鐘並非必要。而且教室若已有真正掛鐘，學生能真正結合時刻與實際生活，遠比撥鐘來得更重要。若學生想嘗試撥鐘，提醒學生

應順時鐘撥轉。

- (5) 電子鐘並非標準教具，也比較看不出時間結構，但因為使用者日多，為師生溝通方便，若有必要也可進行基本教學，以能溝通為原則。

### 錯誤類型

1. 混淆時間量與時刻的概念，亦即混淆「先後」和「長短」。以為先發生的事件比較長，但事實上事件已經結束。

### 評量

1. 評量重點：

- (1) 能依照日常生活情境排出事件發生的先後順序。
- (2) 能依照生活經驗比較事件所花時間的長短。
- (3) 能在日常生活或情境中正確使用簡單時間用語，如「明天」、「今天」、「昨天」、「上午」、「中午」、「下午」、「晚上」。
- (4) 能使用月曆或日曆報讀「幾月幾日星期幾」。
- (5) 能報讀鐘面時間（「整點」與「半點」）。

2. 注意事項：

時間的評量須提供相關的計時工具或情境，紙筆評量受比較多的限制，題目中應包含相關計時工具（鐘面、月曆等）。

<b>S-1-1 長度（同 N-1-5）：</b> 以操作活動為主。初步認識、直接比較、間接比較（含個別單位） <b>補充說明：</b> 含直線與曲線。無常用單位。	n-l-7
---	-------

各項說明請參見 N-1-5。

<b>S-1-2 形體的操作：</b> 以操作活動為主。描繪、複製、拼貼、堆疊。 <b>補充說明：</b> 拼貼可做簡單拼圖、鑲嵌（壁磚）活動。堆疊為立體圖形。	s-l-1
---	-------

連結：D-1-1。

後續：S-2-1、S-2-2。

### 基本說明

1. 本條目目標是透過各種形體的操作活動，讓學生體驗基本的幾何操作。例如移動物品或複製圖形時，可能會做平移、旋轉、翻轉、比對、疊合等操作，也可能察覺到全等或對稱的現象，這些都是日後幾何學習的先備經驗。
2. 描繪：如依照老師給定的圖形，進行塗色。  
複製：如利用透明紙描繪，複製一全等圖形。  
拼貼：如簡單的平面圖形拼圖；幾何造型製作或仿製；簡單幾何圖形鑲嵌。  
堆疊：依照圖片指示，做簡單立體圖形的堆疊（堆積木）。  
前三者是平面活動，後者是空間活動。由於簡單幾何形體容易掌握與判斷，可在這些活動中運用，作為 S-2-2 的前置經驗。
3. 活動重點在啟動或刺激學童的幾何直覺，不做構成要素的教學。做溝通時，也可以讓學童隨意發揮，啟發學童自己對形體結構的體驗。

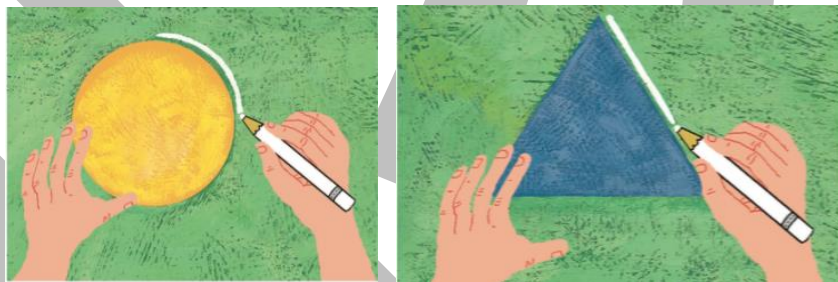
## 條目範圍

1. 本條目重點在幾何體驗，而非幾何圖形與概念的教學。學生在入學前，可能已經知道一些簡單圖形名稱，若有教學需要，可使用這些名稱，但僅限於溝通。至於圖形構成要素、嚴格定義，甚至「全等」、「對稱」等名詞都不該出現在一年級教學現場（見 S-2-1 和 S-2-2）。一年級不做形體命名活動。
2. 依照一年級認知程度，本條目的相關拼圖教學活動和坊間拼圖應有明顯區別。拼圖活動所使用的幾何元件，應簡單且容易區分（除非全等）；若牽涉相似圖形的放大或縮小，其大小應有明顯區別（例如不同大小的正方形）。
3. 活動的難度，須考量學生的年齡。低年級學生肌肉還不能做細密協調，教師不宜做太過精確的要求。
4. 本條目不適合做紙筆評量。

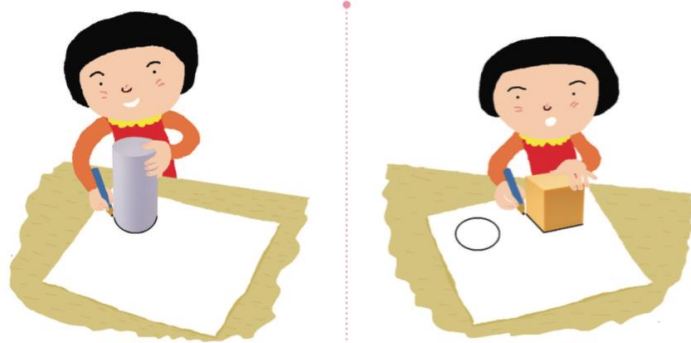
## 釋例

### 1. 描繪與複製：

- (1) 例 1：師生準備造形圖樣（如圖卡或積木），讓學生沿著造形的其中一個面之外緣作描繪，並描述其形狀。



《部》課本第一冊 P.56)



（《部》課本第二冊 P.70）


- (2) 例 2：拓印活動（將上述活動改為塗色再拓印或以蓋印章的方式進行）。


- (3) 例 3：教師給定圖形或圖卡，讓學生沿外緣描繪或利用透明紙複製。

以上教學應與 S-2-1 和 S-2-2 區別。（見條目範圍（1）之說明）。

2. 拼貼：幾何造型、看圖拼貼、拼圖等活動可讓學生進行平移、旋轉、翻轉（鏡射）等全等運動，以及比對、疊合等全等操作，又能學習辨認簡單平面圖形，是進行本條目的重要活動。

- (1) 例 1：看圖拼貼。

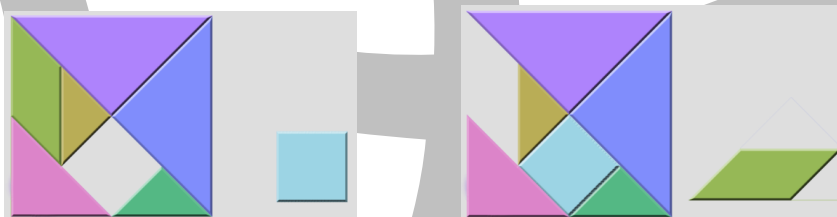
2 用兩塊  拼出下面的圖形。

4 用兩塊  拼出下面的圖形。




(《部》課本第一冊 P.57)

(2) 例 2：幾何圖案的造形活動（含鑲嵌）。將下面圖形板放入拼圖中。



3. 堆疊：透過積木或實物組合等造形活動，經驗空間幾何活動。




(1) 例 1：師生準備空瓶、空盒、空罐、造形積木等，讓學生進行造形活動。

 用你帶來的東西，做一做，看看，可以一組合成什麼呢？



(《部》課本第二冊 P.66 改製)

(2) 例 2：教師準備實物(或圖片)和方塊，請學生依圖作造形活動。

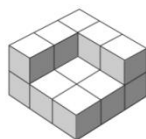
 3 拿出  來排出下面的立體形體。每個立體形體用了幾個  ？

1



有    個  。

2



有    個  。

(《部》課本第二冊 P.69)



## 錯誤類型

1. 學生不知道可做旋轉或翻轉，建議多做拼圖活動，理解其必要性。如下圖做七巧板拼圖，若學生只會將綠色平行四邊形做旋轉，就無法拼成正方形。



2. 空間圖示只有一個方向，學生剛開始可能無法完成，教師應鼓勵學生多做嘗試，從錯誤和觀摩中學習。

## 評量

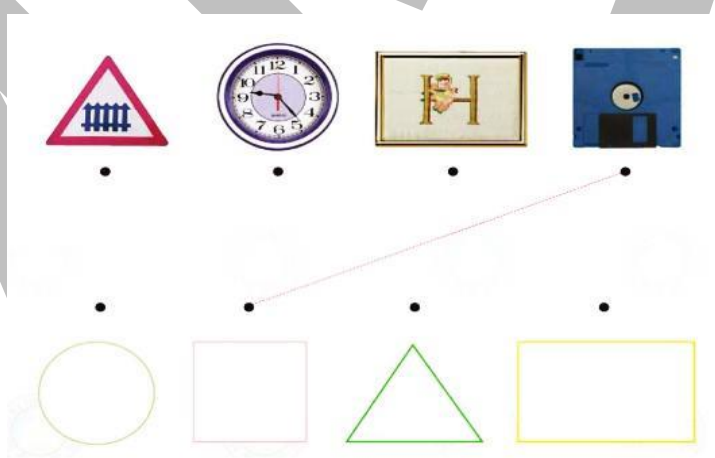
1. 評量重點：

- (1) 能透過操作，完成圖形的描繪、複製、拼貼與形體的堆疊。
- (2) 能在操作過程中體驗形體的平移、旋轉、翻轉、比對、疊合等操作。

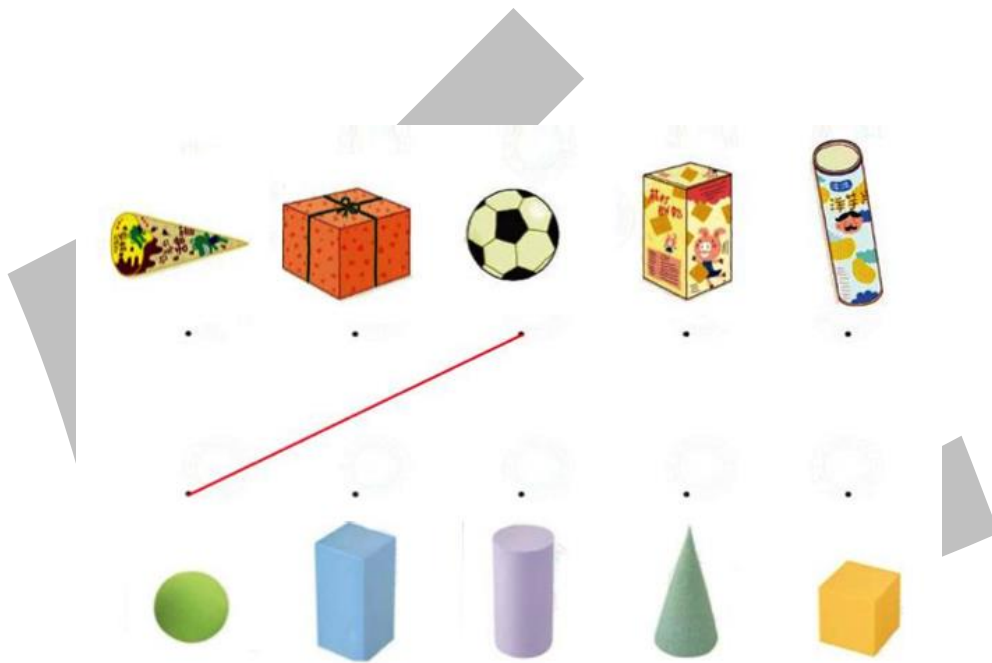
2. 注意事項：

- (3) 本條目以多元評量為主，若採紙筆評量則須提供相關物品（如複製、拼貼需提供物件或膠水），或限制評量目標（如立體堆疊不適合紙筆評量）。
- (4) 紙筆評量可用連連看題型，提供充分的視覺線索。讓學生將很像的形體。

- 例 1：把看起來和很像的圖形連起來。



- 例 2：把看起來和立體積木很像的東西連起來。



<p><b>R-1-1 算式與符號</b>：含加減算式中的數、加號、減號、等號。以說、讀、聽、寫、做檢驗學生的理解。適用於後續階段。</p> <p><b>補充說明</b>：此條目包括小學之後的學習，不再另列條目。本階段應在加減法單元中完成，不需獨立單元教學。</p>	r-1-1
---	-------

**連結**：N-1-2。

**後續**：N-2-6、N-2-10、R-2-1。

**基本說明**

1. 恰當運用算式與符號，有利於學生對數學的理解、思考與分析，增進學生間與師生間之溝通。確實使用各種數學符號，也能讓學生體會數學的嚴格性與普遍性。
2. 算式與符號的使用基於約定，就像學習新語言一樣，必須有練習使用與確認的過程。因此和學習「數」類似（N-1-1），教師必須以說、讀、聽、寫、做的教學，讓學生多加練習，確認學生使用算式與符號的正確性，以利後續師生溝通，並納入學生日常使用的語言。其中「做」，包括在加減法教學時能列出正確的算式，以及能針對給定算式擬題（N-1-2）。
3. 一年級所學習的算式與符號，主要是阿拉伯數字和加減法的算式（包含「加號」、「減號」、「等號」）。為了建立正確的格式，教師可使用「被加數+加數=和」與「被減數-減數=差」的表示法來協助教學（但不放入評量）。
4. 在恰當教學單元（如 N-1-3），可讓學生初步體會「等號」兩邊相等的意義。例如「合十」活動中，問題「10 可以寫成誰的和？」，教師可以將學生提議的結果記錄成  $10=1+9$ 、 $10=2+8$  等，作為後續學習的前置經驗。

**條目範圍**

1. 本條目雖只出現在一年級，但其立意與教學過程應包含在後續數學課程中。
2. 此條目應在 N-1-1、N-1-2、N-1-3 的教學中一起完成，不需另立單元教學。
3. 在小學時，減法算式裡「被減數」比「減數」大的要求是一種約定。在減法解題時，教師要注意學生不可寫錯被減數與減數的位置（N-1-2）。
4. 學生初期常將「等號」視為「紀錄計算結果」的符號，建議基本說明（4）的「等號」記錄方式應等到一年級下學期，加減法計算的學習穩固後才施行，而且只作為活動結果的紀

錄之用。

除了基本說明(4)，等號的其他使用方式在一年級不宜介紹：如在 N-1-3「基本加減法」中混合加減練習的活動結果，不宜寫成算式；不用等號連接算式，如「 $2+3=1+4$ 」「 $2+5=5+2$ 」；不使用連續的等號連結算式，例如「 $6+7=6+4+3=10+3=13$ 」。

釋例(參見 N-1-2、N-1-3)

錯誤類型(參見 N-1-2)

評量(也可參見 N-1-2)

1. 評量重點：

- (1) 能正確執行算式與符號的說、讀、聽、寫、做。
- (2) 能正確列出加法和減法算式，說明算式中符號或數量在題目中的意義。

2. 注意事項：

- (1) 在教學中就要邊做評量，檢查列出算式需與題意相符(數字順序合理、使用符號正確)，並能做正確計算。若有疑義應請學生說明。
- (2) 若要學生圈選正確算式，選項應避免「 $1=7-6$ 」這類不熟卻正確的算式。

**R-1-2 兩數相加的順序不影響其和**：加法交換律。可併入其他教學活動。

補充說明：先用「併加型」(合成型)情境說明，再應用於其他情境。不出現「加法交換律」一詞。

d-I-1

連結：N-1-2、N-1-3。

後續：R-2-2。

基本說明

1. 「計算規律」的學習，應先透過最合理的情境，讓學生自然接受規律「顯然」的正確性；其次，恰當安排練習，讓學生體會運用規律的好處；最後在其他情境中運用「計算規律」。
2. 本條目學習目標為熟悉「兩數相加的順序不影響其結果(和)」。教師從合成分解模型相關情境進行教學，最容易解釋。
3. 當學生理解這個規則後，就可以應用在各種加法問題上，不應受限於情境。
4. 應併入 N-1-2 的教學中一起完成，不需另立單元教學。

條目範圍

1. 課本或上課時不出現「加法交換律」一詞。
2. 在一年級，學生只要能靈活運用此規律即可。教師教學時不應列出底下的算式，也不可如此評量：「 $3+48=48+3$ 」、「 $3+48=48+3=51$ 」。

釋例

1. 透過併加型的情境，經驗「兩數相加的順序不影響其和」。
  - (1) 例 1：「小明左手有 5 顆彈珠，右手有 7 顆彈珠，一共是多少顆？」
  - (2) 例 2：「池塘裡有 5 隻小鴨，岸上有 2 隻小鴨，一共有幾隻小鴨？」合成(併加)型問題是理解「加法交換律」的自然情境。
2. 恰當安排練習，讓學生產生運用「加法交換律」的需求。  
例：計算  $1+69=( )$ 、 $2+59=( )$  等，問括號裡的答案是多少？  
讓學生體會轉換成  $69+1$ 、 $59+2$ ，可大量減少計算負擔，而樂於使用。

3. 在其他類型情境，體會如何理解這個規則，更進而運用這個規則。
- (1) 例 1：「動物園管理員每天餵食美猴王，早上給牠 3 根香蕉，傍晚再給牠 4 根，美猴王一天共吃多少根香蕉？」
- (2) 例 2：「小明有 3 元，媽媽再給他 49 元，小明有多少元？」
- 簡單的例 1 可供學生思考為何加法交換律成立。例 2 更強調學生列成算式  $3+49$  之後，運用釋例 (2) 的經驗，交換順序用  $49+3$  來計算比較簡單。

### 錯誤類型

學生將加法交換律錯誤類推至減法問題，列出錯誤之減法算式（同一錯誤現象之另一原因見 N-1-2）。

例：「小明有 3 元，小華有 5 元，小明比小華少多少元？」學生以為可交換，故不注意「被減數」和「減數」的位置，列成錯誤的  $3-5=2$ 。

建議：教師應確實理解學生錯誤的成因，回到 N-1-2 或 R-1-1，加強學生理解減法的意義與減法算式的正確記錄方式。

### 評量

- 評量重點：
 

能理解「兩數相加的順序不影響其和」，並能活用。
- 注意事項：
 

雖然加法交換律很簡單且常用，但在學習加法初期，依照不同情境，教師仍應評估學生對此規則的熟悉度，彈性處理加數與被加數在列式時互換的狀況，讓學生說明算式的合理性。
- 評量示例：
 

(1) 例 1：下列哪一個選項算出來的答案最大？圈圈看  
 ( 45+3      3+45      45+6      2+45 )

(2) 例 2：下列選項中，哪一組算出來的答案是一樣的？

  - $14+53$  、  $14+35$  。
  - $38+69$  、  $69+38$  。
  - $5+78$  、  $78+4$  。
  - $29+37$  、  $38+29$  。

<p><b>D-1-1 簡單分類：</b>以操作活動為主。能蒐集、分類、紀錄、呈現日常生活物品，能報讀、說明已處理好之分類。觀察分類的模式，知道同一組資料可有不同的分類方式。</p> <p><b>補充說明：</b>非正式表格與統計圖表。</p>	<p>d-1-1</p>
--	--------------

連結：N-1-1、N-1-2、S-1-2。

後續：D-2-1。

### 基本說明

- 低年級資料條目 D-1-1 和 D-2-1 的重點不在介紹正式表格或統計圖，而是從操作活動，初步學習資料的報讀、說明、蒐集、分類、記錄、分析、溝通。一年級處理日常生活或學校常見物品；二年級則更強調和數學相關的物件如幾何形體，以及更深入的分類概念。低年

級的圖表是跟學生比較容易溝通的非正式圖表，記錄物件數目的符號也不見得是數字，可以發揮學生的創意。




2. 本條目的重點，是學生能模仿給定的範例，學習蒐集、分類、製作出自己的分類圖表，同時也能理解老師或其他同學的分類紀錄。
3. 知道圖表中的數目符號或數字與實際資料的對應關係（點數）；知道圖表分項基於某種分類，並能察覺與說明分類根據的模式或特徵；能回答老師根據圖表所提出的問題；能製作自己喜歡的圖表，將資料整理、呈現並說明。
4. 認識因特徵不同，同一組資料可有不同的分類方式。例如一群同學可分成不同性別、不同血型、不同星座、不同街區、不同姓氏、.....。
5. 學生學習分類可能有很多不成熟的想法，老師可強調兩個重點並多做溝通：第一，分類所依據的是同一個概念下的不同分組；第二，同一物體出現在兩個類別中，反映分類可能不妥當。

### 條目範圍

1. 本條目只處理非正式、適合低年級學生的圖表。正式統計圖表教學見 D-3-1、D-4-1、D-5-1、D-6-1。
2. 一年級處理分類只需要簡單明確、言之有物。教師需要恰當安排教學活動，達成本條目「同一組資料可有不同的分類方式」的目標。（更難分類見 D-2-1）

### 釋例

1. 報讀、說明生活情境的「非正式圖表」，說明其意義  
例：小強做了一張圖記錄桌上的東西。說說看，這個圖表記錄了什麼？

		
下	-	正

學生學習理解「圖表」中各種記號的意思，並能說明「圖表」中分類的依據、數字或數量劃記的意義。教師可視情況以問題引導。可告訴學生諸如「正」這類邊點數邊畫記的常用方式，同時強化「五個一數」或「十個一數」的能力。

2. 蒐集、分類、記錄生活中常見的資料。  
可先學習分類的範例，再學習分類。分類只談合不合理，沒有一定正確的分類方式。教師教學應注意所選擇的物件具有多種分類可能。

(1) 例 1：回收的瓶罐怎麼分類。



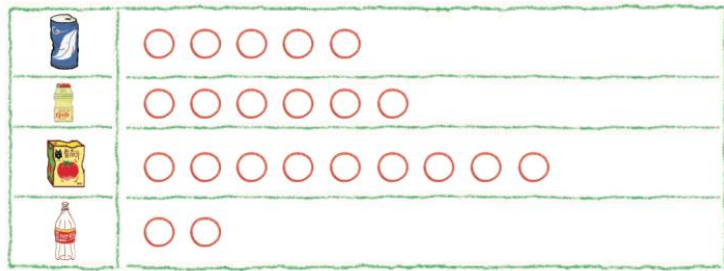
(《部編本國小數學》第一冊課本 P.50)

● 教師詢問學生下列問題，必要時加以指導。

- 有沒有幫忙做過資源回收？
- 這些回收物品可以怎麼分類？
- 拿出一張紙，依照你的分類方法，做一張你自己的分類圖表。

(2) 例 2. 學生的紀錄方式為非正式圖表，不要求格式一致。以下為圖表示例：

● 一個圓圈代表一個回收物品，用畫圈表示資源回收物品的數量。



(《部編本國小數學》第一冊課本 P.50)

● 用塗色表示不同顏色瓢蟲的數量。



(3) 例 3: 給學生一堆動物圖卡，學生可討論要怎麼分類(如腳數、有無翅膀、有無尾巴、...)，可和自然課程統整學習。

### 錯誤類型

1. 學生的點數錯誤，請參考 N-1-1。

2. 教師應謹慎處理所謂「分類錯誤」的問題。原則上，學生只是發展自己的分類想法，教師應請學生盡量發表自己的想法，並依據他的想法來指出其數據是否有缺失、分類是否有疏忽、在同一分類原則下出現一物多類等等問題，而非斷然判斷其對錯。

例：學生可能同時將「出生月」與「年齡」混在同一個分類中。

## 評量

### 1. 評量重點：

- (1) 能透過蒐集日常生活或學校常見的物品，以合理特徵，做簡單分類。
- (2) 能將簡單的分類資料（結果），製作出合理、簡易的分類圖表紀錄。
- (3) 能報讀簡易的分類圖表記錄，並說明分類的方式或依據。
- (4) 能透過觀察分類的模式或特徵，知道同一組資料可有不同的分類方式。

### 2. 注意事項：

- (1) 本條目適合多元（操作）評量，在紙筆評量上需考慮操作為主的特性與多種分類的可能。依據評量目標，題目中宜呈現相關資料的圖示或圖表。
- (2) 紙筆評量只適合根據題意給定的分類問問題，不適合用來檢驗學生的分類方式。

## 二、國民中學教育階段

<b>N-7-1 100 以內的質數：</b> 質數和合數的定義；質數的篩法。	n-IV-1
---	--------

先備：N-6-1。

連結：N-7-2。

### 基本說明

1. 若一個大於1的整數，除了1和本身以外，沒有其他因數，則稱此數為質數。
2. 若一個大於1的整數，除了1和本身以外，還有其他因數，則稱此數為合數。
3. 正整數1既不是質數，也不是合數。
4. 能檢驗 100 以內的任何整數，哪些是質數，哪些是合數。
5. 正整數 2、3、5、11 的倍數判別法。

### 釋例

判斷13是否為質數？

需要檢查大於1，小於13的整數，是否為13的因數。首先，2不是13的因數，所以4、6、8、10、12也不是13的因數；其次，3不是13的因數，所以9也不是13的因數；最後5、7、11也不是13的因數；所以13的正因數只有1和13本身，故13是一個質數。

### 錯誤類型

學生可能會誤認為1，91都是質數的迷思概念。

### 探索

植樹的接龍遊戲。

<b>N-7-2 質因數分解的標準分解式：</b> 質因數分解的標準分解式，並能用於求因數及倍數的問題。	n-IV-1
--	--------

先備：N-6-1、N-6-2。

### 基本說明

1. 在正整數的範圍中，理解正整數的因數、質因數、倍數、公因數、公倍數以及質因數分解等。
2. 質因數分解：將一正整數完全分解為若干個質因數連乘積的過程。
3. 標準分解式：將一正整數表示成質因數的連乘積，遇相同的質因數則以指數形式表示，且底數通常由小排到大。
4. 常以  $(a,b)$  和  $[a,b]$  表示兩正整數  $a$  和  $b$  的最大公因數和最小公倍數；

以  $(a,b,c)$  和  $[a,b,c]$  表示三個正整數  $a$ 、 $b$  和  $c$  的最大公因數和最小公倍數。

5. 互質：兩數最大公因數為 1 時，稱這兩數互質，如  $(12,25) = 1$ ，所以 12 與 25 互質，明顯的 12 與 25 亦沒有共同的質因數。

### 條目範圍

1. 做正整數的質因數分解時，其質因數以不大於 100 為宜。
2. 質因數分解的計算要能熟練，但正整數位數不宜過高。
3. 不介紹「輾轉相除法」求最大公因數。
4. 以短除法求兩個正整數的最大公因數和最小公倍數，主要為複習 N-6-1、N-6-2，來銜接或說明以標準分解式的方法求解此問題。所以在此條目，不以短除法做三個(含)以上的數之最大公因數和最小公倍數問題。

### 釋例

1. 求 72，48 的最大公因數與最小公倍數。

由短除法：

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 72 \quad 48} \\ 2 \overline{) 36 \quad 24} \\ 2 \overline{) 18 \quad 12} \\ 3 \overline{) 9 \quad 6} \\ 3 \quad 2 \end{array}$$

則兩數的最大公因數  $(72,48) = 2^3 \times 3$  或 24，

而兩數的最小公倍數  $[72,48] = 2^4 \times 3^2$  或 144。

或由標準分解式： $48 = 2^4 \times 3$ ， $72 = 2^3 \times 3^2$ ，可得  $(72,48) = 2^3 \times 3$ ， $[72,48] = 2^4 \times 3^2$ 。

2. 求 48，72，90 的最大公因數、最小公倍數。

因為  $(48,72) = 24$ ，所以三數的最大公因數  $(48,72,90) = (24,90) = 6$ 。

因為  $[48,72] = 144$ ，所以三數的最小公倍數  $[48,72,90] = [144,90] = 720$ 。

3. 試求 720 和  $2^6 \times 3^4 \times 7$  的最大公因數。



因為  $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ ，所以

$$(720, 2^6 \times 3^4 \times 7) = (2^4 \times 3^2 \times 5, 2^6 \times 3^4 \times 7) = 2^4 \times 3^2 = 144。$$

#### 4. 相關應用問題

例：一長方體蛋糕，其長108公分，寬72公分，高54公分，今小文欲將此蛋糕全部切成大小相同的正方體，且沒剩餘。試問：最少能切成幾個正方體？

因為長方體蛋糕需全部切成正方體，所以正方體的邊長為108、72、54的公因數。又正方體的個數要最少，故正方體的邊長要最大，即邊長為108、72、54的最大公因數。由於  $(108, 72) = 36$ ，可以算出  $(108, 72, 54) = ((108, 72), 54) = (36, 54) = 18$ ，得知正方體

的最大邊長為18。又因為  $108 \div 18 = 6$ ， $72 \div 18 = 4$ ， $54 \div 18 = 3$ ，所以總共可切成正方體  $6 \times 4 \times 3 = 72$  個。

#### 錯誤類型

1. 標準分解式求最大公因數與最小公倍數的問題，學生會誤選質因數與質因數的指數。
2. 學生對於應用問題中，會誤判該求最大公因數或最小公倍數。

#### 評量

1. 能了解短除法與標準分解式在求最大公因數、最小公倍數問題時的關聯性。
2. 能將最大公因數、最小公倍數的觀念應用到生活上的相關問題。

#### 探索

1. 由最大公因數的意義，探索  $(a, b, c)$  和  $((a, b), c)$  的關係，並與「以標準分解式求最大公因數」的方法做比較。
2. 由最小公倍數的意義，探索  $[a, b, c]$  和  $[[a, b], c]$  的關係，並與「以標準分解式求最小公倍數」的方法做比較。
3. 利用實際例子，探索兩正整數  $a$  和  $b$  會滿足  $ab = (a, b)[a, b]$  的性質。

<b>N-7-3 負數與數的四則混合運算(含分數、小數)：</b> 使用「正、負」表徵生活中的量；相反數；數的四則混合運算。	n-IV-1
--	--------

先備：N-6-3、N-6-4、N-6-5。

連結：N-7-4、N-7-5。

後續：N-8-1。

#### 基本說明

1. 國中數感的培養，除了對實例要有數感外，更需要培養涉及正負符號的數感。
2. 能認識負數是比零小的數。
3. 正、負數在生活中的應用是指能利用正、負數來表徵生活中性質相反的量。
4. 能辨別兩個負數的大小。
5. 在數線上和原點距離相同，但方向相反的兩個點，所代表的數互為相反數，且其和為0，

即  $a + (-a) = 0$ 。

6. 能理解無論  $a$  是正數或是負數， $-a$  與  $a$  互為相反數。可知  $-(-a)$  與  $a$  皆為  $-a$  的相反數，

所以  $-(-a) = a$ 。

7. 能以最大公因數、最小公倍數熟練分數的約分、擴分，擴及到正負數的四則運算，並有能力將分數化至最簡分數。

### 條目範圍

不宜出現多於三層以上括號的四則運算。

### 釋例

1. 求零下5度是指零度還低5度的溫度，而  $-5$ 、 $-10\frac{1}{2}$ 、 $-12.3$  分別是比较0小5、 $10\frac{1}{2}$ 、12.3 的數。

2. 若往東10步記為+10，則往西4步記為-4；第一週公司盈餘5000萬記為+5000萬，第二週若虧損1000萬則記為-1000萬。

3.  $-5$  是比0小5的數， $-8$  是比0小8的數。由於  $5 < 8$ ，所以  $-5 > -8$ 。

4. 3的相反數是-3， $-\frac{7}{12}$ 的相反數是 $\frac{7}{12}$ ，而0的相反數是0。

5. 能理解  $a+b$  的相反數就是  $-a-b$ ，即  $-(a+b) = -a-b$ 。

因為  $a+b+(-a-b) = a+b-a-b = 0$ ，所以  $-a-b$  是  $a+b$  的相反數，但是  $a+b$  的相反數也可以記成  $-(a+b)$ ，所以  $-(a+b) = -a-b$ 。同理也可以說明  $a-b$  的相反數是  $-a+b$ 。

### 錯誤類型

1. 學生可能有  $-a$  為負數的迷思概念。

2. 學生可能會有  $\frac{2}{3}$  的相反數為  $\frac{3}{2}$  的迷思概念。

### 評量

1. 評量宜包含生活中的實例與正負符號的數之間的連結。

2. 評量宜包含負數、整數、相反數在數線上的位置與關係。

<b>N-7-4 數的運算規律：</b> 交換律；結合律；分配律； $-(a+b) = -a-b$ ； $-(a-b) = -a+b$ 。
---

n-IV-2
--------

先備：N-6-3、N-6-4、N-6-5。

連結：N-7-3。

後續：N-8-1。

### 基本說明

1. 能理解一個數  $a$  加上另一個數  $b$  後，不一定比原來的  $a$  大。換句話說，要由  $b$  是正數或是負數才能決定  $a+b$  是否比  $a$  大或比  $a$  小：

$$a + \text{正數} > a,$$

$$a + \text{負數} < a.$$

反之，若  $a+b > a$ ，則要能認識到這時  $b$  是正數；而若  $a+b < a$ ，則  $b$  是負數。

2. 能理解無論  $a$ 、 $b$  是正或負，

$$a + (-b) = a - b, \quad a - (-b) = a + b, \quad a \times (-b) = -ab, \quad (-a) \times (-b) = ab.$$

3. 能理解  $a \times a$  永遠大於或等於 0。

4. 若  $a$ 、 $b$  為兩個數，則有加法交換律  $a+b=b+a$ 、乘法交換律  $a \times b = b \times a$ 、加法結合律  $(a+b)+c=a+(b+c)$ 、乘法結合律  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$  及乘法分配律

$$a \times (b+c) = a \times b + a \times c, \quad (a+b) \times c = a \times c + b \times c.$$

5. 除了上述的運算規則，另外去括號的規則也很重要，例如： $-(a+b) = -a-b$ ；

$$-(a-b) = -a+b, \text{ 並能活用於數的四則運算。}$$

### 條目範圍

負數與數的四則運算不宜出現分數與小數的複雜混合計算。

### 釋例

1.  $(-8) + (-20) = -(8+20) = -28$ 。

2.  $320 + 43 - 143 = 320 + (43 - 143) = 320 - 100 = 220$ 。

3.  $25 \times 13 \times 4 = 13 \times (25 \times 4) = 13 \times 100 = 1300$ 。

4.  $(-150) - 2 \times (-50) = -150 + 100 = -(150 - 100) = -50$ 。

5.  $5 \times 123 - 5 \times 23 = 5 \times (123 - 23) = 5 \times 100 = 500$ 。

6.  $\left(-12\frac{1}{8}\right) \times 4 = -\left(12 + \frac{1}{8}\right) \times 4 = -\left(48 + \frac{1}{2}\right) = -48\frac{1}{2}$ 。

$$7. \frac{12}{13} - \left(\frac{6}{7} - \frac{1}{13}\right) - \frac{1}{7} = \frac{12}{13} - \frac{6}{7} + \frac{1}{13} - \frac{1}{7} = \frac{12}{13} + \frac{1}{13} - \frac{6}{7} - \frac{1}{7}$$

$$= \left(\frac{12}{13} + \frac{1}{13}\right) - \left(\frac{6}{7} + \frac{1}{7}\right) = 1 - 1 = 0.$$

上面應用運算規則到簡化的例子，在教學上，要配合訓練學生的觀察能力。

### 錯誤類型

1. 學生可能會忽略正、負符號的運算，例如： $-a \times (-b + c) = ab + ac$  的錯誤產生。
2. 學生對於除法的運算會有迷思概念，例如： $a \div (b + c) = a \div b + a \div c$ ，

$$a \div b \div c = a \div (b \div c)。$$

### 評量

評量時，除非有特別指定要將計算結果化為最簡分數，否則所有相對應之等值分數仍宜視為正確。

### 探索

以實例讓學生探索下列四則運算的變化型：

$$a \times b \div c = a \times b \times \frac{1}{c} = a \times \frac{1}{c} \times b = a \div c \times b，$$

$$a \div b \div c = a \times \frac{1}{b} \times \frac{1}{c} = a \times \frac{1}{b \times c} = a \div (b \times c)。$$

能分辨  $a \div (b + c) = a \times \frac{1}{b + c}$  與  $a \div b + a \div c = a \times \frac{1}{b} + a \times \frac{1}{c} = a \times \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$  的不同。

<b>N-7-5 數線：</b> 擴充至含負數的數線；比較數的大小；絕對值的意義；以 $ a - b $ 表示數線上兩點 a, b 的距離。	n-IV-2
--	--------

連結：N-7-8、S-8-6、G-8-1。

基本說明（教學目標之描述，含數學概念，定義說明、定理、習慣性用法）。

1. 在數線上，我們稱 0 的位置為原點，且將負數(負整數、負分數、負小數)標記在原點的左邊，正數標記在原點的右邊。標記時，知道數線上愈右邊的數愈大，愈左邊的數愈小，如  $-7 < -3 < 0 < 10$ ，而對應到數線時， $-7, -3, 0, 10$  的位置是由左排到右。
2. 數線上點所對應的數稱為點的坐標，例如：A 點的坐標為  $-3$ ，可記為  $A(-3)$ 。
3. 加減法與在數線上做平移的對應關係。
4. 數線上一數的絕對值等於此數與原點的距離。
5. 以實例表現數線上  $a, b$  兩點的距離可以  $|a - b|$  或  $|b - a|$  表示。
6. 絕對值在國中有兩個比較重要的應用：一個是用來比較負數的大小，另一個是用絕對值來表達數線上的兩點距離。

- 兩個負數，如果其絕對值愈大，表示其對應的點在原點左方越遠處，則其值就愈小。
- 數線是學生首次學習代數與幾何結合的題材，教學上應包括這類的題材，例如：求  $a$ 、 $b$  兩點中點的坐標。

### 條目範圍

- 數線上  $a$ 、 $b$  兩點的中點，只需以實例來說明，如：求  $-5$  和  $9$  中點的坐標，暫時不需要導出  $a$ 、 $b$  兩點中點的坐標公式。
- 絕對值引入的目的是用於紀錄數線上兩點間的距離，不處理「絕對值方程式和絕對值不等式」。例如：不應出現  $|x-3|=4$ ，求  $x$  的值； $|x-5|\leq 4$ ，求  $x$  的範圍…等問題。

### 釋例

- $-3+10$  即是由代表  $-3$  的點向右移  $10$  個單位，而  $-3-10$  是由代表  $-3$  的點向左移  $10$  個單位。
- 點  $-2$  至原點的距離為  $2$ ，即  $-2$  的絕對值為  $|-2|=2$ 。
- 在國一階段學習絕對值應採用較直接且直觀的方式教學較佳，例如：一個正數的絕對值就是它自己，一個負數的絕對值就是把它的負號去掉後的數，而  $0$  的絕對值還是  $0$ ，所以

$$\left|-\frac{5}{3}\right|=\frac{5}{3} \text{ (把負號去掉)}; \left|\frac{5}{3}\right|=\frac{5}{3}。$$

絕對值在數學上的定義：若  $a > 0$ ，則  $|a|=a$ ；若  $a < 0$ ，則  $|a|=-a$ ，若  $a=0$ ，則  $|a|=0$ 。

- 試比較  $-15$  和  $-18$  的大小。  
首先  $|-15|=15$ ， $|-18|=18$ ，因為  $|-15| < |-18|$ ，所以  $-15 > -18$ 。
- 試求數線上兩點  $A(-6)$  和  $B(8)$  的中點坐標。

設中點為  $C(x)$ ，因為  $\overline{AB}=|8-(-6)|=|8+6|=14$ ，所以  $\overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 14=7$ ，故

$x=-6+7=1$  或  $x=8-7=1$ ，故中點為  $C(1)$ 。

### 錯誤類型

- 教學上若有談到嚴謹的「絕對值在數學上的定義」，宜注意學生可能會有  $|a|=\pm a$  的迷思概念。
- 當學生學會負數的加減計算後，應該要理解有絕對值算式的計算，例如： $10-|-6|$  和  $10-(-6)$  的不同。

## 評量

1. 評量宜包含負數、整數、相反數在數線上的位置與關係。
2. 絕對值引入的目的是用於紀錄數線上兩點間的距離，所以在評量上不處理「絕對值方程式和絕對值不等式」。

## 探索

1. 以 $|a-b|$ 表示數線上兩點間距離的概念，探討 $|x-3|=4$ 、 $|2x-5|=3$ ...等問題。
2. 利用數線上兩點的距離觀念來探索中點坐標的公式。

<b>N-7-6 指數的意義：</b> 指數為非負整數的次方；同底數的大小比較；指數的運算。	n-IV-3
--	--------

先備：N-6-1。

連結：N-7-2、N-7-7、N-7-8。

後續：N-8-6。

## 基本說明

1. 設 $a$ 為任一數，則 $n$ 個 $a$ 相乘以 $a^n$ 表示，讀作 $a$ 的 $n$ 次方，其中 $n$ 為指數， $a$ 為底數。
2. 能理解當 $a > 1$ 時，若 $n$ 愈大，則 $a^n$ 愈大；當 $0 < a < 1$ 時，若 $n$ 愈大，則 $a^n$ 愈小。
3. 對於算式中出现「指數形式的數」能理解並運算。
4. 當底數為分數時，以 $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$ 來解釋。
5. 知道指數的運算順序優先於四則運算，例如： $-3^4 = -(3^4)$ 。

## 條目範圍

不處理「指數為負整數」的情形。

## 釋例

1.  $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ 。

2.  $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3^4}{2^4}$ 。

3.  $(-3)^5 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = -3^5$ 。

4.  $(-5)^6 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = 5^6$ 。

5. 比較 $\left(\frac{8}{9}\right)^3$ 和 $\left(\frac{8}{9}\right)^2$ 的大小。

因為 $\frac{8}{9} < 1$ ，所以 $\left(\frac{8}{9}\right)^3 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 \times \frac{8}{9} < \left(\frac{8}{9}\right)^2$ 。

6. 可使用電算器讓學生經驗「當 $a > 1$ 時，若 $n$ 愈大，則 $a^n$ 愈大；當 $0 < a < 1$ 時，若 $n$ 愈大，則 $a^n$ 愈小」的性質。

## 錯誤類型

1. 學生會誤認為當  $n$  愈大，則  $a^n$  會愈大。
2. 學生會誤認為  $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a}$ 。
3. 當指數  $n$  分別為奇數和偶數時，釐清  $a^n$ 、 $(-a)^n$ 、 $-(-a)^n$  及  $-a^n$  的異同。

### 評量

評量內容不應出現「指數為負整數」的數。

<p><b>N-7-7 指數律：</b>以數字例表示「同底數的乘法指數律」(<math>a^m \times a^n = a^{m+n}</math>、<math>(a^m)^n = a^{mn}</math>、<math>(a \times b)^n = a^n \times b^n</math>，其中 <math>m, n</math> 為非負整數)；以數字例表示「同底數的除法指數律」(<math>a^m \div a^n = a^{m-n}</math>，其中 <math>m \geq n</math> 且 <math>m, n</math> 為非負整數)。<math>a \neq 0</math> 時 <math>a^0 = 1</math>。</p>	<p>n-IV-3</p>
--	---------------

先備：N-6-1。

連結：N-7-6、N-7-8。

後續：N-8-6。

### 基本說明

1. 能理解乘法的指數律： $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ； $(a^m)^n = a^{mn}$ ； $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ ，其中  $m, n$  為大於 0 的整數， $a, b$  為任意數。
2. 能理解  $a^0 = 1$ ，其中  $a \neq 0$ 。
3. 能理解除法的指數律： $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ，其中  $a \neq 0$ ， $m \geq n$ 。

### 條目範圍

1. 在指數律  $a^m \div a^n = a^{m-n}$  中，指數  $m, n$  須限制在如下條件： $m, n$  為非負整數，且  $m \geq n$ 。
2. 指數必須為非負整數。

### 釋例

1. 可用乘法或除法指數律說明  $5^0 = 1$ 。

$$5^3 = 5^{3+0} = 5^3 \times 5^0 \Rightarrow 5^0 = 1;$$

$$5^0 = 5^{1-1} = 5 \div 5 = 1。$$

2.  $2^2 \times 4^4 = ?$

$$2^2 \times 4^4 = 2^2 \times (2^2)^4 = 2^2 \times 2^8 = 2^{10} = 1024。$$

3.  $(39)^5 \times \left(\frac{1}{13}\right)^5 = ?$

$$(39)^5 \times \left(\frac{1}{13}\right)^5 = \left(39 \times \frac{1}{13}\right)^5 = 3^5 = 243。$$

4.  $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 = ?$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{1}{2^4} \times \frac{8^2}{3^2} = \frac{1}{2^4} \times \frac{(2^3)^2}{3^2} = \frac{1}{2^4} \times \frac{2^6}{3^2} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}。$$

5.  $6^{10} \div 9^5 = ?$

$$6^9 \div 9^4 = (2 \times 3)^9 \div (3^2)^4 = 2^9 \times 3^9 \div 3^8 = 2^9 \times 3^{9-8} = 1536。$$

### 錯誤類型

學生可能會將  $(a \times b)^n = a^n \times b^n$  誤用為  $(a + b)^n = a^n + b^n$  或  $(a - b)^n = a^n - b^n$  的錯誤觀念。

### 評量

1. 評量時的題目、計算過程中，不應出現「指數為負整數」的情形。
2. 評量時的題目不宜出現代數符號，應以具體的數字例呈現。

<b>N-7-8 科學記號：</b> 以科學記號表達正數，此數可以是很大的數（次方為正整數），也可以是很小的數（次方為負整數）。	n-IV-3
--	--------

連結：N-7-6、N-7-7。

### 基本說明

1. 科學記號表示法是將正數表示成  $a \times 10^n$ ，其中  $1 \leq a < 10$ ， $n$  為整數。學生應知道  $a$  不能是 10 的原因，是為了表示法的唯一性。
2. 能知道自然科學領域常用的單位名稱。
3. 引入  $10^n$ ，其中指數  $n$  為整數，且其運算滿足指數律。

### 條目範圍

1. 科學記號表示法可以應用在任何正數，教學上應強調科學記號之所以重要在於我們能用它表示很大的數和很小的數，因此教學時，要與自然科學應用的例子結合在一起。
2.  $10^n$  中的  $n$ ，其實是一種刻畫數字大小與做比較的有效指標(即所謂的「數量級」)，這是高中對數函數學習的前置經驗。
3. 引入  $10^n$  中的指數  $n$  為負整數時，可以使用小數與之轉換來解釋。
4. 主要為科學記號的了解與使用，不宜涉及科學記號的四則運算。
5. 不涉及其他底數的負整數次方。

### 釋例

1. 以科學記號表示 32100000 和 0.00000035。
 
$$32100000 = 3.21 \times 10^7, 0.00000035 = 3.5 \times 10^{-7}。$$
2. 1 奈米 (nm) =  $10^{-9}$  公尺 (m)、1 微米 =  $10^{-6}$  公尺 (m)、1 毫米 (mm) =  $10^{-3}$  公尺 (m)、光速  $3 \times 10^8$  公尺/秒 (m/sec) 等。
3. 試比較  $5 \times 10^6$  和  $6 \times 10^5$  的大小。
 
$$5 \times 10^6 = 5 \times 10 \times 10^5 = 50 \times 10^5 > 6 \times 10^5。$$
 或因為  $5 \times 10^6$  為 7 位數， $6 \times 10^5$  為 6 位數，所以  $5 \times 10^6 > 6 \times 10^5$ 。
4. 試問  $8.23 \times 10^6$  是幾位數？
 
$$8.23 \times 10^6 = 8230000$$
 是 7 位數。

### 錯誤類型



1. 在科學記號的轉換上易有迷思概念，例如： $2.3 \times 10^{-4} = 0.000023$ 的迷思概念。
2. 單位換算中的迷思概念，例如： $1 \text{ 公分} = 10^2 \text{ 公尺}$ 的迷思概念。

### 評量

1. 能比較出科學記號的數彼此的大小關係。
2. 評量不宜涉及科學記號的四則運算。

<b>N-7-9 比與比例式：</b> 比；比例式；正比；反比；相關之基本運算與應用問題，教學情境應以有意義之比值為例。	n-IV-4 n-IV-9
--	------------------

先備：N-6-6。

後續：S-8-8。

### 基本說明

1. 比、比例式常用來表明數量間的比例關係，和其關係密切的有比值、倍數的概念。
2.  $a$ 、 $b$  ( $b \neq 0$ ) 兩數的比記為  $a:b$ ，且該比的前項為  $a$ 、後項為  $b$ 。
3. 若  $a:b$  和  $c:d$  為相等的比，則記為  $a:b=c:d$ ，該式稱為比例式。
4. 若  $a:b=m:n$ ，則  $a:m=b:n$  且  $a=mk$ ， $b=nk$ ， $k \neq 0$ 。
5. 若數值  $x$  改變時，數值  $y$  也隨之改變，且  $y$  值恆為  $x$  值的  $k$  ( $k \neq 0$ ) 倍。此時  $x$ 、 $y$  的關係為  $y=kx$ ，稱  $y$  和  $x$  成正比。
6. 若數值  $x$  改變時，數值  $y$  也隨之改變，且  $x$  和  $y$  的乘積為一個固定的數(不為 0)。此時  $x$ 、 $y$  的關係為  $xy=k$ ， $k \neq 0$ ，稱  $y$  和  $x$  成反比。
7. 比例問題在日常生活中或自然科技中有很廣泛的應用，因此國中學習比例，其中最重要的是要能認識哪些問題可用比與比例式來解決。常見的比例問題有：折扣、加成、利率、匯率、密度、濃度、速度、比例尺等。

### 條目範圍

1. 在比值的計算中，不提及「繁分數」的紀錄方式，以「前項÷後項」解之。
2. 在比例概念的教學與題目設計，以簡單數值為主，遇到複雜的數值或繁瑣的估算時，可使用計算機，例如匯率、密度、濃度等問題。

### 釋例

1. 500 公克的食鹽水中有 70 公克的食鹽，同樣濃度的 750 公克的食鹽水有多少公克的食鹽？  
因為  $750 \div 500 = \frac{3}{2}$ ，所以 750 公克的食鹽水有  $70 \times \frac{3}{2} = 105$  (公克) 的食鹽。或假設 750 公克的食鹽水有  $x$  公克的食鹽，得比例式： $500:70 = 750:x$  (對應關係)  $\Rightarrow 500x = 70 \times 750$ ，得  $x = 105$ 。
2. 一輛時速 90 km 的汽車在高速公路上等速直線行駛 45 分鐘的距離為多少？這段距離在比例尺 1:50000 的地圖上會是多少公分？
3. 面積相同的矩形，長與寬成反比；體積相同的長方體，高與底面積成反比。
4. 若  $3:4 = (x-1):x$ ，得  $3x = 4x - 4$ ，解得  $x = 4$ 。
5. 若  $a:b = 3:7$  且  $b - a = 24$ ，則令  $a = 3k$ ， $b = 7k$  解之，或  $a = \frac{3}{7}b$  代入解之。

### 錯誤類型

1. 「已知  $2a = 3b$ ，則  $a:b = 3:2$ 」，學生可能有「 $a:b = 2:3$ 」的迷思概念。
2. 在  $y$  和  $x$  成正比的關係式  $y = kx$  中，學生可能有「 $k > 0$ 」的迷思概念。

3. 在應用問題的比例式中，學生可能有「等號兩邊前後項的對應關係位置擺錯」的迷思概念
4. 學生可能有「若  $x$  增加， $y$  也隨之增加，則  $y$  必和  $x$  成正比」或「若  $x$  增加， $y$  也隨之減少，則  $y$  必和  $x$  成反比」的迷思概念。

### 評量

1. 在比例的問題中，除了基本的定義、運算外，在評量內容的設計上宜多與生活經驗、自然科技等作為主要題幹，以培養比例概念的素養。
2. 比例的意義和運算主為概念的建立、計算方法的熟練，在數值設計上宜以簡單的數值為主。

<b>S-7-1 簡單圖形與幾何符號：點、線、線段、射線、角、三角形與其符號的介紹。</b>	<b>s-IV-1</b>
--	---------------

先備：S-6-4。

連結：S-7-1、S-7-3。

### 基本說明

1. 認識點、線、線段、射線、角的意義。
2. 認識點、線、線段、射線、角的符號與記法。
3. 認識三角形與其符號之介紹。

### 條目範圍

本單元不需設獨立單元，宜與其他單元合併學習。

### 釋例

1. 點沒有大小區分，習慣上以英文字母大寫 A、B、C、…表示，如下圖所示，點 A 或 A 點。

• A

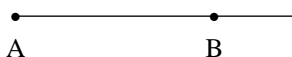
2. 直線沒有端點，向兩端無限延伸，習慣上以大寫英文字母 L、M、N 表示；相異兩點可以成一直線，以直線 AB 或 AB 直線表示，以符號  $\overleftrightarrow{AB}$  表示，如下圖所示。



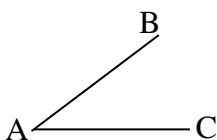
3. 線段的兩邊有端點，可以量長度，以大寫英文字母表示，如下圖所示，線段 AB 或 AB 線段，以符號  $\overline{AB}$  表示。



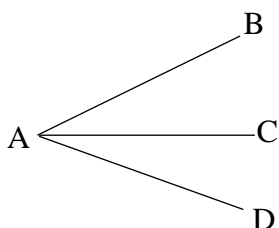
4. 射線是以一邊端點為起點，向另一邊的端點無限延伸，如下圖所示，從 A 點向 B 點發射，稱為射線 AB，以符號  $\overrightarrow{AB}$  表示。



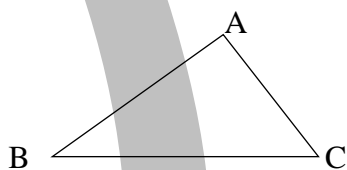
5. 如圖，角的記法稱  $\angle A$  或  $\angle BAC$  或  $\angle CAB$ 。



6. 如圖所示，此時的角必須使用三個點表示，例如  $\angle BAC$  或  $\angle CAD$ ；不宜用  $\angle A$ 。

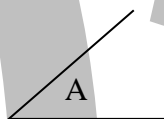


7. 三角形的記法以三個頂點標記符號，例如三角形 ABC 或以符號 $\triangle ABC$ ，如下圖所示：

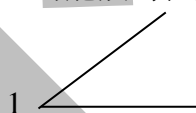


### 錯誤類型

1. 角的記法稱 $\angle BAC$ ，部分學生不知道誰是頂角
2.  $\angle A$  的 A，可能誤寫在圖形的裡面，如下圖所示：



3.  $\angle 1$  的 1，可能誤寫在圖形的外面，如下圖所示：



<b>S-7-2 三視圖：</b> 立體圖形的前視圖、上視圖、左（右）視圖。立體圖形限制內嵌於 $3 \times 3 \times 3$ 的正方體且不得中空。	s-IV-16
--	---------

先備：S-6-4。

連結：S-7-1、S-7-3。

### 基本說明

1. 瞭解立體圖形的三視圖(包括上視圖、前視圖、後視圖、左視圖、右視圖)的意義。
2. 繪製立體圖形的三視圖(包括上視圖、前視圖、後視圖、左視圖、右視圖)。
3. 給定一立體圖形，理解各視圖間的關係，例如前視圖和後視圖、左視圖與右視圖均有線對稱的關係，因此從立體圖形的前視圖、上視圖與右視圖便可得知其他視圖
4. 從前視圖、上視圖與右視圖便可大約知道原立體圖形的樣貌。

### 條目範圍

1. 不出現利用提供的視圖要求學生重製立體圖形。
2. 立體圖形的前(後)視圖、上視圖、左（右）視圖。立體圖形限制內嵌於  $3 \times 3 \times 3$  的正立方體且不得中空。

### 釋例

1. 給定立體圖形引導學生討論此立體圖形的樣貌，希望學生描述立體圖形時，不能僅單從某一方向觀察。
2. 設計活動，透過從實物立體圖形的上方觀察以及水平方向的觀察，及繪製視圖的練習與同班坐不同位置同學討論，來理解觀察位置的不同與視圖(上、前、後、左、右視圖)的差異。
3. 整合前面對各方向視圖的學習，來理解視圖間的關係。
4. 由於是在立體圖形的上方俯視該立體圖形，因此我們稱此輪廓為「上視圖」或「俯視圖」。

但要注意站在立體圖形的前方、後方、右方、左方俯視繪製的「上視圖」會有將此輪廓（平面圖形）旋轉的情況，因此一般我們強調「上視圖」是從站在立體圖形的正前方俯視繪製而成。

### 錯誤類型

1. 學生易混淆左右視圖的方向。
2. 學生繪製上視圖時，可能誤解上視圖的定義，例如從立體圖形的左上方往下看，則會產生偏差 90 度的錯誤上視圖。

### 評量

利用三視圖的觀察後重製立體圖形並非本課綱的教學目標，更不適宜當成評量目標。

<b>S-7-3 垂直</b> ：垂直的符號；線段的中垂線；點到直線距離的意義。	s-IV-3
--	--------

先備：S-5-4。

連結：S-7-1、S-7-4、S-7-5。

後續：S-8-1、S-8-3、S-8-4。

### 基本說明

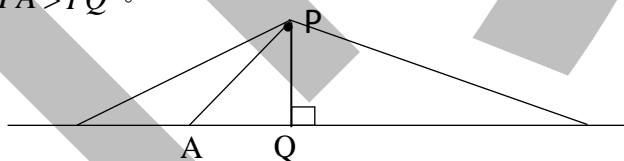
1. 利用直角定義兩直線互相垂直。
2. 認識  $\perp$  記號。
3. 能認識一線段之中垂線的意義。
4. 通過直線  $L$  外的一點  $P$ ，可以使用直角三角板，作一直線  $PQ$  垂直於直線  $L$ ，且交  $L$  於一點  $Q$ 。我們稱點  $Q$  為直線  $PQ$  在  $L$  上的垂足。利用測量說明  $\overline{PQ}$  為點  $P$  到直線  $L$  的最短距離。我們稱點  $P$  到垂足  $Q$  的距離  $\overline{PQ}$  為點  $P$  到直線  $L$  的距離。

### 條目範圍

本單元的中垂線暫不引入尺規作圖。

### 釋例

1. 透過直角三角板畫出兩條垂直的直線，認識垂直的意義與符號。
2. 過線段中點的垂線稱為該線段的中垂線。
3. 透過將直線外一點到該直線畫許多條線段，以垂直線段為最短距離，稱為這點到該直線的距離。學生可透過測量或觀察方式發現  $\overline{PA} > \overline{PQ}$ 。



4. 直線  $L$  與直線  $M$  垂直，記為  $L \perp M$ 。

### 錯誤類型

1. 有些學生誤以為直線有中垂線。
2. 有些學生誤以為直線有中點。
3. 有些學生誤以為線段的垂線只有一條。

<b>S-7-4 垂直：線對稱的性質：</b> 對稱線段等長；對稱角相等；對稱點的連線段會被對稱軸垂直平分。	s-IV-5
--	--------

先備：S-5-4。

連結：S-7-1、S-7-3、S-7-5。

後續：S-8-1、S-8-3、S-8-4。

### 基本說明

1. 以生活中的平面圖形為例，來理解線對稱的意義。
2. 認識對稱軸、對稱點、對稱線(段)及對稱角。理解對稱圖形中，對稱線段等長、對稱角相等。
3. 線對稱圖形中，兩個對稱點之連線段會被對稱軸垂直平分。

### 條目範圍

1. 以平面圖形為例，僅透過對摺重疊判斷圖形對稱。
2. 透過對摺驗證說明對稱線段與對稱角相等。

### 釋例

1. 透過對摺重疊找到線對稱圖形的對稱軸，重疊的點稱為對稱點，重疊的角稱為對稱角，重疊的邊稱為對稱邊。
2. 所有線段均為線對稱圖形：將一線段的兩端點對摺重疊，產生的摺痕為對稱軸；對稱軸必經過該線段的中點，並且兩對稱角重疊；透過平角 180 度以及兩角相等，可得其中一角為 90 度，必垂直。
3. 平面圖形中的各種三角形、矩形、正方形、菱形、平行四邊形、梯形、箏形、圓形...等，均可以透過對摺驗證是否為線對稱圖形。

### 錯誤類型

1. 學生易誤認平行四邊形是線對稱圖形。
2. 學生易誤認矩形的對角線是對稱軸。
3. 學生易誤認對稱圖形的對稱軸只有一條。

### 探索

可以透過對摺與剪紙活動的展開圖延伸學生掌握鏡射的概念。

<b>S-7-5 線對稱的基本圖形：</b> 等腰三角形；正方形；菱形；箏形；正多邊形。	s-IV-5
--	--------

連結：S-7-1、S-7-3、S-7-4。

後續：S-8-4~S-8-12。

### 基本說明

1. 理解等腰三角形的對稱軸是底邊的中垂線，且此中垂線過三角形的頂點，並了解兩底角相等。
2. 理解正三角形有三條對稱軸，分別是三邊的中垂線，並了解三個內角都相等。
3. 理解正方形有四條對稱軸，並了解四邊都等長與四個角都是直角。
4. 理解菱形是線對稱圖形，兩條對角線均為對稱軸，並了解四邊都等長。
5. 理解箏形有一條對稱軸，並了解兩組鄰邊等長。
6. 理解正多邊形為線對稱圖形，並了解所有邊長都相等，每個內角都相等。

### 條目範圍

不談圖形的包含關係。

### 釋例

1. 透過對摺可以了解等腰三角形的對稱軸是底邊的中垂線，且此中垂線過三角形的頂點，並了解兩底角相等。同理透過對摺，發現正三角形三個內角都相等。
2. 透過摺紙發現正方形 4 條對稱軸的位置，以及箏形 1 條對稱軸的位置。

### 錯誤類型

1. 學生容易將邊長都等長的多邊形誤為正多邊形。
2. 學生容易將內角都相等的多邊形誤為正多邊形。

### 評量

不出現圖形包含關係的試題。

<b>G-7-1 平面直角坐標系：</b> 以平面直角坐標系、方位距離標定位置；平面直角坐標系及其相關術語（縱軸、橫軸、象限）。	<b>g-IV-1</b>
--	---------------

先備：S-6-2。

連結：N-7-5、A-7-6。

後續：G-8-1。

### 基本說明

1. 能運用直角坐標來標定位置，並能在直角坐標系上描出已知坐標對應的點。
2. 熟悉縱軸(y軸)、橫軸(x軸)和象限之術語、直角坐標系上坐標的定義。
3. 能了解四個象限上的符號規則，例如：第一象限為(+,+)，第二象限為(-,+)，第三象限為(-,-)，第四象限為(+,-)。
4. 能運用方位距離來標定位置。

### 條目範圍

方位只涉及東、西、南、北等四個方位。

### 釋例

1. 選定班上某一橫排為x軸，某一縱排為y軸，利用直角坐標系標定教室中的座位坐標。
2. 以原點為起點，向右走 3 單位，向下走 4 單位，其坐標為(3,-4)。
3. 能了解語詞「颱風中心位置位於恆春東方 100 公里處」的意義。

### 錯誤類型

1. 學生可能會混淆直角坐標系(x,y)和(y,x)的位置。
2. 點在第一象限，學生可能會誤認為與x軸的距離就是其x坐標，與y軸的距離就是其y坐標。當點在其他象限時，可能會有正負號的混淆。
3. 學生可能會混淆東西南北的相對關係。
4. 學生可能誤認為象限含有坐標軸。

<b>A-7-1 代數符號：</b> 代數符號；以代數符號表徵交換律、分配律、結合律；一次的化簡及同類項；以符號紀錄生活中的情境問題。	<b>a-IV-1</b>
---	---------------

先備：R-6-1。

連結：A-7-2、N-7-4、G-7-1。

後續：A-8-1、A-8-2。

### 基本說明

1. 理解利用  $a, b, c, \dots, x, y, z$  等符號代表一個數或一個未知數，以及數和符號構成算式的意義。
2. 理解代數算式裡符號的約定。

(1)「 $\cdot$ 」可記成「 $\times$ 」，亦可省略，因此  $2 \cdot a$ 、 $2 \times a$ 、及  $2a$  意義皆相同。又如， $3 \cdot a \cdot b$  可

簡寫成  $3ab$ 。

(2)  $1 \cdot a$ 、 $(-1) \cdot a$ 、及  $(-2) \cdot a$  分別簡寫成  $a$ 、 $-a$ 、及  $-2a$ 。

(3)  $2a$  的含義為「2 個  $a$ 」或「 $a$  的 2 倍」。

(4) 符號及分式的等式： $\frac{4}{7}x = \frac{4x}{7}$ ，其中  $\frac{4}{7}x$  含義為  $\frac{4}{7} \times x$ ，而  $\frac{4x}{7}$  則為  $4 \cdot x \div 7$ 。又如

$$-\frac{4}{7}x = \frac{4x}{-7} = \frac{-4x}{7}。$$

3. 對一次算式中的同類項進行化簡及合併：

(1) 假設組成代數式的每一項皆為一個數或是一個數跟一個未知數的乘積，我們稱此代數式為一「一次式」，例如  $x+2y-1$ 、 $z-3$ 、 $x+1+3y-2x+y+3$  皆為一次式。

(2) 在一次式裡，假設有兩項其所含未知數為同一個未知數，或是皆不含未知數（亦即其皆為數），我們稱此兩項為「同類項」。例如，在  $x+1+3y-2x+y+3$  中  $x$  及  $-2x$  為同類項、 $3y$  及  $y$  為同類項、 $1$  跟  $3$  為同類項。

(3) 一次式裡同類項可合併以簡化運算。例如， $x+1+3y-2x+y+3$  中的  $x$  及  $-2x$  合併為  $-x$ 、 $3y$  及  $y$  合併為  $4y$ 、 $1$  跟  $3$  合併為  $4$ 。因此  $x+1+3y-2x+y+3$  化簡成  $-x+4y+4$ 。

4. 利用代數符號表徵數學中常見的運算規律。

(1) 交換律： $a+b=b+a$  及  $a \cdot b=b \cdot a$ 。

(2) 結合律： $a+(b+c)=(a+b)+c$  及  $a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$ 。

(3) 分配律： $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$  及  $(a+b) \cdot c=a \cdot c+b \cdot c$ 。

5. 能用代數算式紀錄生活情境中的數學問題。

### 條目範圍

1. 對七年級學生而言，用符號代表數是相對抽象的過程，需要時間去理解及適應。因此在本條目範圍內，應避免引進過多代數術語及名詞。本條目的重點在於讓學生理解代數符號及其形成的算式的意義。

2. 本條目只做一次式的化簡，不涉及二次式以上（含二次）的運算。

### 釋例

1. 可先複習小學已學的代數知識。例如：已知小臻的哥哥比小臻大 3 歲，那麼當小臻  $x$  歲時，小臻的哥哥為  $x+3$  歲。反之，當小臻的哥哥為  $y$  歲時，則小臻為  $y-3$  歲。

2. 學生初學代數式化簡時，數字不宜過於複雜。適當的例子如： $2x+3-x-1$  化簡為  $x+2$ ，

$$2x-y+5x+2y+1 \text{ 化簡為 } 7x+y+1。$$

3. 假設一個長方形的長為 5 公分、寬為  $a$  公分，那麼它的面積即為  $5a$  平方公分。

4. 若有 1000 元鈔票  $x$  張及 500 元鈔票  $y$  張，可用  $1000x+500y$  代表總金額，因此當  $x=3, y=1$  時，總金額為 3500 元，而當  $x=1, y=2$  時，則總金額為 2000 元。

### 錯誤類型

1. 學生在利用分配律  $a(b+c)=ab+ac$  化簡代數式時，可能會忘記  $a$  既要乘  $b$ ，也要乘  $c$ 。如化簡  $3(x+1)-2x+1$  時，可能會寫成

$$\begin{aligned} 3(x+1)-2x+1 &= 3x+1-2x+1 \\ &= x+2 \end{aligned}$$

2. 部分學生在化簡  $3 - 2x + 7x$  時，可能會寫成  $3 - 9x$ 。

3. 部分學生在化簡分式  $\frac{9x-3}{3}$  時，可能會寫成  $3x-3$ 。

**A-7-2 一元一次方程式的意義：**一元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出一元一次方程式。

a-IV-2

先備：R-5-3。

連結：A-7-1、A-7-3、A-7-4、A-7-5、A-7-6、A-7-7。

後續：F-8-1、F-8-2。

### 基本說明

1. 理解一元一次方程式及其解的意義：

(1) 「方程式」指的是含有未知數的等式，「一元」指的是此方程式恰有一個未知數，而「一次」代表每當此未知數出現在方程式裡時，其次方數皆為一。換句話說，組成方程式的每一項皆為一個數或是一個數跟此未知數的乘積。

(2) 若有一個實際的數值，使得當我們將一元一次方程式中的未知數替換成此一實際數值時，等式成立，我們便將此一實際數值稱做為此方程式的「解」。

2. 能由具體情境中列出一元一次方程式。

### 條目範圍

本條目只處理唯一解的情況，不考慮無解或無窮多個解的情況（高中十年級時再討論這些情況）。

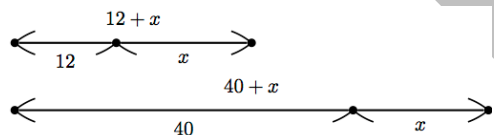
### 釋例

1.  $3x+1=4x-2$  為一元一次方程式，但  $3x+1-4x+2$  及  $x+y-1=2x+1$  則非一元一次方程式，其中  $3x+1-4x+2$  不含等號，而  $x+y-1=2x+1$  有兩個未知數，所以非一元一次方程式。

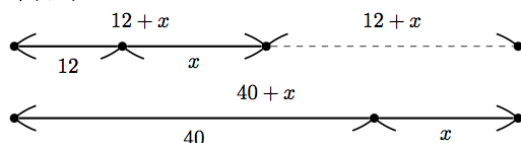
2. 考慮一元一次方程式  $3x+1=4x-2$ ，將式中所有  $x$  代入 3 時等式成立，所以此方程式的解為  $x=3$ 。而將所有  $x$  代入 4 時等式不成立，因此 4 不是此方程式之解。

3. 「老師帶兩盒一樣的口香糖，發給全班 26 個學生。每人發 2 條後，總共剩 8 條。假設一盒有  $x$  條口香糖，試列出此  $x$  滿足的一元一次方程式。」：一盒有  $x$  條口香糖，所以兩盒共  $2x$  條。26 個學生一人發 2 條，共發出 52 條，所以剩  $2x-52$  條。因此一元一次方程式為  $2x-52=8$ 。

4. 可適當的利用線段圖輔助思考。如「已知小桐今年 12 歲，小桐父親今年 40 歲。請問經過幾年後父親年齡為小桐年齡的兩倍？」在  $x$  年後，小桐的年齡為  $12+x$ ，而父親的年齡為  $40+x$ ，用線段圖表示可得



其中第一條線段代表小桐的年齡，第二條線段代表父親的年齡。將代表小桐的線段延長一倍，得到



若父親的年齡為小桐的兩倍，則第一條線段（含虛線部分）總長等於第二條線段的長度，因此  $2(12+x)=40+x$ 。



## 錯誤類型

將應用問題轉化成數學式子時的迷思概念，例如釋例中的(4)：「請問經過幾年後父親年齡為小桐年齡的兩倍？」，學生可能轉化為「 $40 + x = 12 \times 2$ 」。

<b>A-7-3 一元一次方程式的解法與應用：等量公理；移項法則；驗算；應用問題。</b>	<b>a-IV-2</b>
---	---------------

連結：A-7-2、A-7-5、A-7-8。

後續：A-8-7。

## 基本說明

1. 能理解等量公理「等式左右同時加、減、乘、或除一數（除數不為0）時，等式仍然成立」的概念。亦即，若已知 $a = b$ 成立，則 $a + c = b + c$ 、 $a - c = b - c$ 、 $a \times c = b \times c$ （ $c \neq 0$ ）等亦成立。
2. 等量公理為移項法則的基礎。學生需經由熟練等量公理來理解移項法則，並應用於一元一次方程式的解。
3. 應用一元一次方程式解的意義於驗算。
4. 能利用等量公理及移項法則等解決具體情境中的一元一次方程式問題。

## 條目範圍

不考慮無解或無窮多解的一元一次方程式。

## 釋例

1. 考慮一元一次方程式 $x + 2 = 3$ 。根據等量公理， $(x + 2) - 2 = 3 - 2$ 。化簡左式後得到 $x = 3 - 2$ 。觀察此推導過程，我們可以發現利用等量公理的結果，等同於將原式左邊的「+2」變成「-2」搬到右邊。又如方程式 $3x = 6$ ，根據等量公理， $\frac{1}{3} \times 3x = \frac{1}{3} \times 6 = \frac{6}{3}$ 。化簡左式後得到 $x = \frac{6}{3}$ 。觀察此推導過程，我們發現應用等量公理的結果，等同於將原式左邊的「3倍」變成「 $\frac{1}{3}$ 」（或是說將「乘3」變成「乘 $\frac{1}{3}$ 」）搬到右邊而得到 $x = \frac{6}{3} = 2$ 。此類規則即為移項法則。
2. 協助學生養成寫答案時將未知數寫在等號左邊的習慣。
3. 一開始碰到未知數的移項時，可適當地將等量公理的細節列出。待學生習慣未知數的移項後，細節即可省略。例：解 $-x + 8 = 3x + 4$ 。

$$\begin{array}{ll} -x + 8 = 3x + 4 & \text{根據等量公理，左右同加 } x \text{，等式依舊成立：} \\ (-x + 8) + x = (3x + 4) + x & \\ 8 = 4x + 4 & \text{化簡一次式得到：} \\ 4 = 4x & \text{利用移項法則將右式的 } +4 \text{ 變號移到左式：} \\ 4x = 4 & \\ x = 1 & \text{利用等號的對稱性將未知數寫在等式的左邊：} \end{array}$$

4. 「老師帶兩盒一樣的口香糖，要發給全班26個學生。如果每人發2條後，總共剩8條，問每盒原來裝幾條口香糖？」假設原來每盒有 $x$ 條，依題意可列出 $2x - 2 \times 26 = 8$ ，利用移項法則可解出 $x = 30$ 。（此時可將 $x = 30$ 代入情境驗算。）

## 錯誤類型

1. 假設簡化方程式時需要通分再移項，因為多了一個步驟，容易發生疏漏。如將方程式 $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1$ 兩邊同乘6時，誤寫成 $6(\frac{x}{2} + \frac{x}{3}) = 1$ 。
2. 假設方程式為 $3x - 6 = 9$ ，部分學生可能會將「左右同時乘以 $\frac{1}{3}$ 」誤寫成 $\frac{1}{3} \times 3x - 6 = \frac{1}{3} \times 9$ ，而得到 $x - 6 = 3$ 。又或是在做「左右同時除以3」時列式列對 $\frac{3x - 6}{3} = \frac{9}{3}$ ，但化簡時，將左式錯誤化簡成 $x - 6$ 。為了避免類似的錯誤，老師可提醒學生在解一元一次方程式時，最好先用移項法則將所有含未知數的項移至等號的一側，而所有未含未知數的項移至等式的另一側，使得等式兩側各只有一項，再用乘除的移項法則解出未知數。

<b>A-7-4 二元一次聯立方程式的意義：</b> 二元一次方程式及其解的意義；具體情境中列出二元一次方程式；二元一次聯立方程式及其解的意義；具體情境中列出二元一次聯立方程式。	a-IV-4
---	--------

連結：A-7-2、A-7-5、A-7-6。

## 基本說明

1. 理解二元一次方程式及其解的意義：
  - (1) 「二元」指的是此方程式有兩個未知數，「一次」指的是這此方程式每一項皆為一個數或是一個數和一個未知數的乘積。
  - (2) 假設  $a$  跟  $b$  是兩個數，使得當二元一次方程式裡的未知數  $x$  及未知數  $y$  用  $a$  跟  $b$  分別代入時，等式成立，我們便稱  $(a, b)$  是此二元一次方程式的一組解。
2. 能由具體情境中列出二元一次方程式。
3. 能理解二元一次聯立方程式及其解的意義：
  - (1) 二元一次聯立方程式指的是由兩個二元一次方程式組成的一組方程式。如
$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$
。
  - (2) 若  $(a, b)$  代入一個二元一次聯立方程式後，兩個等號都成立，我們便稱  $(a, b)$  為此二元一次聯立方程式的解。
4. 能由具體情境列出二元一次聯立方程式。

## 條目範圍

介紹二元一次聯立方程式時，不考慮無解或無窮多解的情況（此部份留至高中十年級時再討論）。

## 釋例

1. 考慮  $xy + 1 = 3x$ ，雖然  $xy$  項中  $x$  及  $y$  次方數皆為一，但這並非一個二元一次方程式。在一個二元一次方程式裡，每一項只能是一個數或是一個數跟一個未知數的乘積。又如  $x + \frac{1}{y} = 3$  亦非一個二元一次方程式，因為不是所有未知數的次方數皆為一。
2. 二元一次方程式可以有很多解，例如考慮二元一次方程式  $x + 2y = 8$ ，將  $x = 2, y = 3$  代入時等式成立，所以  $(2, 3)$  是方程式的一個解。同理， $(4, 2)$  及  $(-2, 5)$  皆為方程式的解。
3. 「小桐有 60 元，要全部拿來買郵票，郵票分面額 10 元及 5 元兩種，若設共購買 10 元郵票  $x$  張及 5 元郵票  $y$  張，試列出  $x$  及  $y$  滿足之二元一次方程式。」依題意，小桐欲購買價值 60 元的郵票，而購買 10 元郵票  $x$  張及 5 元郵票  $y$  張共需  $10x + 5y$  元，所以  $10x + 5y = 60$ 。

4. 「已知小璿有十元及五元硬幣共10枚，總值80元。令  $x$  及  $y$  分別為小璿十元硬幣數及五元硬幣數，試列出  $x$  及  $y$  滿足的二元一次聯立方程式。」依題意可得

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 10x + 5y = 80 \end{cases}$$

### 評量

二元一次聯立方程式的題型不宜過度延伸。例如

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 2 \\ x + \frac{2}{y} = 3 \end{cases}$$

雖然我們可令  $z = \frac{1}{y}$ ，使其變成標準的二元一次聯立方程式，但初學二元一次聯立方程式應著重於其本質，不宜過度延伸，造成學習上的失焦。

**A-7-5 二元一次聯立方程式的解法與應用：代入消去法；加減消去法；應用問題。**

a-IV-4

連結：A-7-3、A-7-4。

### 基本說明

1. 能利用代入消去法解二元一次聯立方程式。
2. 能利用加減消去法解二元一次聯立方程式。
3. 能從具體情境裡列出二元一次聯立方程式，求其解，並驗證答案的合理性。

### 條目範圍

1. 僅考慮方程式個數及未知數個數皆為二的情況。
2. 不考慮無解或無窮多解的情況。

### 釋例

1. 在解二元一次聯立方程式時，可利用其中一個方程式將一個未知數用另一個未知數的代數式來表示，再將此表示式代入另一個方程式而得到一個一元一次方程式，進而解出其中一個未知數的值。此作法稱為「代入消去法」。例：

$$\begin{cases} x + y = 1 & \text{①} \\ x + 2y = 3 & \text{②} \end{cases}$$

由①式可得  $x = 1 - y$ ，代入②式後得到  $(1 - y) + 2y = 3$ ，由此解得  $y = 2$ ，進而解出  $x = -1$ 。(此時可代入檢查  $(-1, 2)$  是否的確為兩個方程式的共同解。)

2. 在解二元一次聯立方程式時，可將兩個方程式各乘一個非零常數，使得其中一個未知數在兩式的係數相同（或互為相反數）。相減（或相加）之後即得一個另一未知數的一元一次方程式，進而求出聯立方程式的解，此作法稱為「加減消去法」。例：

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & \text{①} \\ 3x + 4y = 2 & \text{②} \end{cases}$$

將①式乘以3、②式乘以2得到

$$\begin{cases} 6x + 9y = 3 & \text{③} \\ 6x + 8y = 4 & \text{④} \end{cases}$$

再將③式及④式相減，即得  $y = -1$ 。（這事實上是一個等量公理的應用。）將此值代入①式後得到  $2x + 3(-1) = 1$ 。由此解出  $x = 2$ 。

3. 「七年二班共有學生 28 人，已知男生比女生多 4 人，問男生、女生各多少人？」

作法一：假設男生有  $x$  人，女生有  $y$  人，依題意得到 
$$\begin{cases} x + y = 28 \\ x - y = 4 \end{cases}$$
。藉由代入消去法或加減

消去法可解出  $x = 16, y = 12$ 。

作法二：假設男生有  $x$  人。因為女生比男生少 4 人，所以女生有  $x - 4$  人。男女生共 28 人，所以  $x + (x - 4) = 28$ ，由此解出  $x = 16$ 。

注意到作法二本質上即為代入消去法（即將一個未知數用另一個未知數的代數式來表示，在這邊我們將女生人數用男生人數的代數式來表示）。

<p><b>A-7-6 二元一次聯立方程式的幾何意義：</b><math>ax + by = c</math> 的圖形；<math>y = c</math> 的圖形（水平線）；<math>x = c</math> 的圖形（鉛垂線）；二元一次聯立方程式的解只處理相交且只有一個交點的情況。</p>	<p>g-IV-2 a-IV-4</p>
---	--------------------------

連結：A-7-4。

後續：F-8-2。

### 基本說明

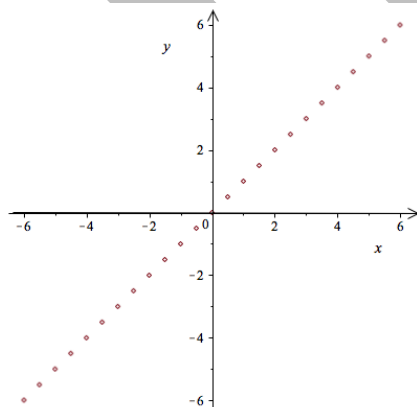
1. 能在直角坐標平面上描繪二元一次方程式的圖形：在直角坐標平面上，以描繪多個已知點的方式來描繪二元一次方程式  $ax + by = c$  的圖形，並觀察其圖形成一直線的現象。更進一步，可發現只要找到  $ax + by = c$  的兩個解，那麼過這兩點的直線即為  $ax + by = c$  的圖形。
2.  $y = c$  的圖形為水平線，而  $x = c$  的圖形為鉛垂線。
3. 能理解二元一次聯立方程式及其解的幾何意義：二元一次聯立方程式裡的兩個二元一次方程式對應到直角坐標平面上的兩條直線，此時二元一次聯立方程式的解即為這兩條直線的交點坐標。

### 條目範圍

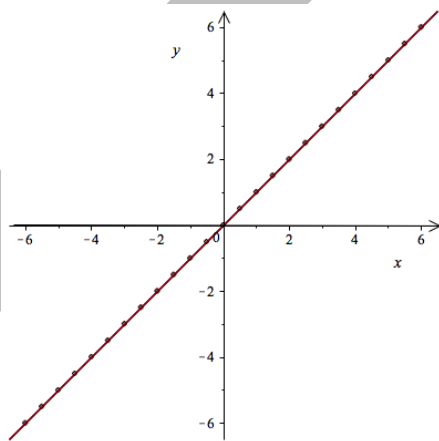
在國中階段僅處理二元一次聯立方程式恰有一個解的情況，其餘情況在高中 G-10-2 再處理。

### 釋例

1. 考慮二元一次方程式  $x - y = 0$ ，顯然對任意數  $k$ ， $(k, k)$  皆為方程式的解。取若干個  $k$  的值，在直角坐標系上標示對應的  $(k, k)$ ，如

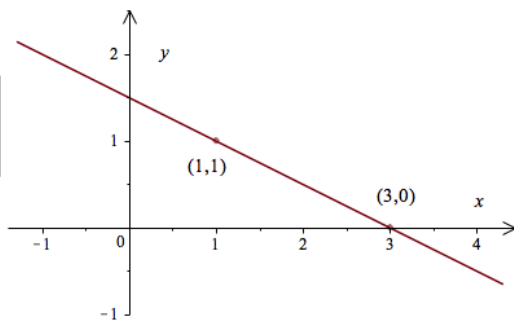


可發現這些點落在一直線上。將過這些點的直線畫出來，即為此二元一次方程式的圖形，如

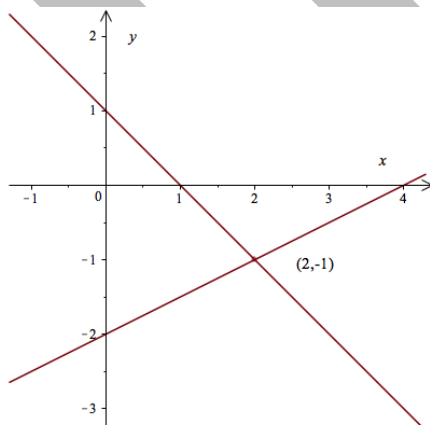


多舉幾個例子，使學生相信  $ax + by = c$  的圖形皆為一直線。

2. 在熟知且明瞭二元一次方程式的圖形為一直線之後，我們可以利用「兩點唯一決定一直線」的性質，簡化繪圖過程：因為兩點決定一直線，我們只需找到二元一次方程式的兩個解，在直角坐標系上找出對應的兩點，並過此兩點做一直線，此直線即為此方程式的圖形。如考慮二元一次方程式  $x + 2y = 3$ ，我們可以輕易地找到兩個解  $(3,0)$  及  $(1,1)$ ，過這兩點做一直線，此直線即為方程式的圖形。



3. 考慮二元一次方程式  $x = c$  (視為  $x + 0y = c$  的簡化)，如果  $(a,b)$  是此方程式的解，顯然  $a$  必須等於  $c$ ，而  $b$  可以是任意數。將直角坐標系中所有  $x$ -坐標為  $c$  的點描出來，可以發現是一條鉛垂線。同理， $y = c$  (視為  $0x + y = c$  的簡化) 的圖形會是一條水平線。
4. 考慮二元一次聯立方程式  $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$ ，在直角坐標系畫出對應的兩條直線，



發現兩直線交於  $(2,-1)$ ，恰為此聯立方程式的解。(直線上的每一點對應到二元一次方程式的一個解，所以兩條直線的交點為二元一次聯立方程式的解。)

<b>A-7-7 一元一次不等式的意義：</b> 不等式的意義；具體情境中列出一元一次不等式。	a-IV-3
---	--------

連結：A-7-2、A-7-8。

### 基本說明

1. 能理解不等式的意義以及口語上約定，例如「未滿」及「不足」等意指「 $<$ 」，而「不超過」及「至多」等意指「 $\leq$ 」。
2. 符號  $a \leq b$  代表「 $a < b$ 」或「 $a = b$ 」，口語上可以說成「 $a$  小於或等於  $b$ 」或「 $a$  不大於  $b$ 」。同理，符號  $a \geq b$  代表「 $a > b$ 」或「 $a = b$ 」，口語上可以說成「 $a$  大於或等於  $b$ 」或「 $a$  不小於  $b$ 」。
3. 能理解不等式的遞移律，即若  $a < b$  且  $b < c$ ，則  $a < c$ ，以及其他類似規則。
4. 「一元一次不等式」指的是不等式中恰有一個未知數，而此未知數的次方數為 1。
5. 能由具體情境中列出簡單的一元一次不等式。（所謂的簡單的一元一次不等式指的是形式為  $ax + b \leq c$ 、 $ax + b < c$ 、 $dx + e \geq f$ 、或  $dx + e > f$  的不等式。）

### 條目範圍

不涉及有兩個不等號的一元一次不等式，如  $3 \leq 5x + 2 \leq 9$ 。

### 釋例

1. 「從台北坐高鐵到高雄至少要一小時半。」用不等式的符號來表示，可寫成「令  $a$  為從台北坐高鐵到高雄所需小時數，則  $a \geq 1.5$ 」。語意上，這邊「 $a \geq 1.5$ 」表示「 $a$  是一個大於或等於 1.5 的數」。
2. 「小穎帶了 200 元到水果行買蘋果，蘋果一顆 25 元，但因小穎忘記攜帶環保購物袋，另需花 2 元購買一個塑膠袋。假設小穎最後購買的蘋果數為  $x$ ，試列出  $x$  滿足的一元一次不等式。」蘋果一顆 25 元，買  $x$  顆需花  $25x$  元，另外需花 2 元購買一個塑膠袋，因此共花費  $25x + 2$  元。花費不能超過攜帶的現金，因此  $25x + 2 \leq 200$ 。

<b>A-7-8 一元一次不等式的解與應用：</b> 單一的一元一次不等式的解；在數線上標示解的範圍；應用問題。	a-IV-3
--	--------

連結：A-7-3、A-7-7。

### 基本說明

1. 若  $a$  是一個數，使得當一個一元一次不等式中的未知數代入  $a$  時不等式成立，我們便稱  $a$  為此不等式的一個解。
2. 理解不等式的運算性質：
  - (1) 在不等式左右同加一數或同減一數，不等式仍然成立。
  - (2) 在不等式左右同乘一正數或同除一正數，不等號方向不變。
  - (3) 在不等式左右同乘一負數或同除一負數，則不等號方向改變。
3. 能利用上述不等式的運算性質解單一的一元一次不等式。
4. 能在數線上標出一元一次不等式解的範圍。
5. 能利用一元一次不等式解應用問題。

### 條目範圍

1. 不處理牽涉到兩個不等號的一元一次不等式，如  $3 \leq 2x - 1 \leq 5$ 。
2. 不去解類似  $2x + 1 < 2x + 3$  或  $2x + 1 \geq 2x + 3$  的一元一次不等式（即化簡後沒有未知數的不等式）。

### 釋例

1. 用多個例子使學生發現「在不等式左右同乘一正數或同除一正數，不等號方向不變。在不等式左右同乘一負數或同除一負數，則不等號方向改變。」

教師若要證明，可依下述處理：假設  $a$  跟  $b$  之間的大小關係為  $a > b$ ，移項可推得  $a - b > 0$ ，亦或是說  $a - b$  為一個正數。

(1) 假設  $c$  為一個正數，則  $c(a - b)$  亦為正數，或是說  $c(a - b) > 0$ 。左式用分配率展開得  $ca - cb > 0$ ，再移項得到  $ca > cb$ 。

(2) 假設  $c$  為一個負數，則  $c(a - b)$  為一負數，或是說  $c(a - b) < 0$ 。左式用分配率展開得  $ca - cb < 0$ ，再移項得到  $ca < cb$ 。

由以上討論我們得到一個結論：在不等式左右同乘一正數（或同除一正數），不等號方向不變；在不等式左右同乘一負數（或同除一負數），則不等號方向改變。（也有其他方法，如畫數線，考慮比值等。）

2. 考慮一元一次不等式  $3x - 1 \leq 5$ 。不等式兩側同加1，不等式仍然成立，因此  $3x - 1 + 1 \leq 5 + 1$ ，化簡得到  $3x \leq 6$ 。再將不等式兩側同乘  $\frac{1}{3}$ ，因為  $\frac{1}{3}$  是一個正數，不等號方向不變，所以

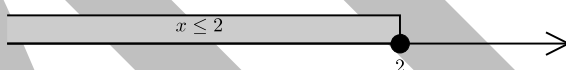
$\frac{1}{3} \times 3x \leq \frac{1}{3} \times 6$ ，化簡得到  $x \leq 2$ ，即為其解。

3. 考慮一元一次不等式  $-3x < 6$ 。將不等式兩側同乘  $-\frac{1}{3}$ ，因為  $-\frac{1}{3}$  是一個負數，不等號方向改變，所以  $(-\frac{1}{3}) \times (-3x) > (-\frac{1}{3}) \times 6$ ，化簡得到  $x > -2$ ，即為其解。

4. 考慮一元一次不等式  $3x - 1 \leq 5$ ，由釋例(2)可知解為  $x \leq 2$ 。在數線上，在2左方的點皆為小於2的數，而在2右方的點皆為大於2的數，因此  $3x - 1 \leq 5$  的解在數線上的範圍為



或以斜線（或陰影）示意



（習慣上，若解的範圍包含端點，我們會用實心點標出端點。）

5. 考慮一元一次不等式  $3x - 1 < 5$ ，解為  $x < 2$ ，其在數線上的範圍為



或以斜線（或陰影）示意



（習慣上，若解的範圍不包含端點，我們會用空心點標出端點。）

6. 「小穎帶了200元到水果行買蘋果，蘋果一顆25元，但因小穎忘記攜帶環保購物袋，另需花2元購買一個塑膠袋。試問小穎最多可購買幾顆蘋果？」假設小穎共購買  $x$  顆蘋果，則  $x$  滿足  $25x + 2 \leq 200$ 。此一元一次方程式的解為  $x \leq \frac{198}{25} = 7.92$ 。但這裏的  $x$  必須是整數，因此小穎最多可以買7顆蘋果。

### 錯誤類型

1. 部份學生常會忘記「不等式兩側同乘一負數，不等號方向改變」。
2. 部份學生在看到一個未知數時，心理上會覺得那代表一個正數（這或許是因為小學階段碰到的數都是正數），而犯下類似  $5 > 3 \supset 5x > 3x$  的錯誤。
3. 部份學生會誤認  $x > 2$  的解只包含整數解，例如寫成  $x = 3, 4, 5, \dots$ 。

<b>D-7-1 統計圖表：</b> 蒐集生活中常見的數據資料，整理並繪製成含有原始資料或百分率的統計圖表：直方圖、長條圖、圓形圖、折線圖、列聯表。遇到複雜數據時可使用計算機輔助，教師可使用電腦應用軟體演示教授。	d-IV-1 n-IV-9
--	------------------

先備：D-6-1。

連結：D-7-2。

後續：D-8-1。

### 基本說明

1. 學生應循序漸進，在非分組的情況，學習各種統計圖表之製作，並計算各種統計指標，等觀念清楚後，再學習分組的處理方式，並知道分組的使用時機。
2. 統計學中，條形圖分為長條圖、直方圖兩大類。長條圖適合用於表現離散的資料，因此各長條以適當的距離間隔來表現資料的離散性；直方圖則適合用於表現連續的資料，因此各長條間並無間隔，且資料應依序排列。
3. 國中階段統計的教學宜以有序且具連續性的資料為主，統計圖形則以直方圖、或折線圖為主。
4. 複雜數據時，學生可使用計算機輔助。當教學設備允許時，可使用電腦應用軟體輔助學習。

### 條目範圍

以生活中常見的數據資料為主。

### 釋例

1. 教師可選擇生活中常見的數據資料，要求學生從資料的蒐集、分類與整理、選擇適合的統計圖表與繪圖，統整性的學習整個概念。
2. 處理百分率的統計圖表時，因取近似值緣故，可能產生總和不等於 100% 的情況，一般會將部分所占比率作適度調整，使其總和仍等於 100%。

### 錯誤類型

學生可能選擇不適當的統計圖，例如：不具順序或不具連續性的資料，統計圖卻選擇以直方圖、或折線圖呈現。

### 探索

生活中常見的數據資料，可搭配性別平等、人權、環境、與海洋等四大議題。

<b>D-7-2 統計數據：</b> 用平均數、中位數與眾數描述一組資料的特性；使用計算機的「M+」或「Σ」鍵計算平均數。	n-IV-9 d-IV-1
---	------------------

先備：D-6-1。

連結：D-7-1。

後續：D-8-1。

### 基本說明

1. 平均數、中位數與眾數均可以某種程度地表示整筆資料集中的位置。平均數是指所有資料值的總和除以總次數；中位數是將資料排序後，前後各切成一半的中間位置資料值；眾數是次數最高的一個或一組資料值。平均數、中位數會使落在兩邊的資料呈現出某種「平衡」



狀態。平均數是量的平衡，中位數則是個數的平衡，而眾數是落在出現次數最高的位置，與平均數、中位數有差別。

- 將幾份同類資料合併時，其總和等於各份資料的平均數乘以各份次數的加總。必要時，可使用計算機的「M+」或「Σ」鍵來輔助計算。

### 條目範圍

本條目旨在學生了解統計圖表的意義與使用，勿作過度延伸。例如：教學與評量不適合出現「給定平均數及次數，反求此組資料中某一未知的數」的問題。

### 釋例

- 給定一組資料，教師可先提問「能否使用一個數來描述此一組資料的集中位置」，之後再進行平均數、中位數、眾數的教學。
- 平均數對於資料中有特別大或特別小的數特別敏感，中位數則不受影響。以 { 1, 2, 3, 4, 5 } 和 { 1, 2, 3, 4, 500 } 兩組資料為例，第一組的平均數、中位數均相同，但第二組的中位數不變，平均數則為 102。

### 錯誤類型

誤認為任何資料中平均數和中位數都必定很接近，甚至相等。

### 探索

加權平均數。

## 三、普通型高級中等學校教育階段

<b>N-10-1 實數：</b> 數線，十進制小數的意義，三一律，有理數的十進制小數特徵，無理數之十進制小數的估算，( $\sqrt{2}$ 為無理數的證明 ★)，科學記號數字的運算。	n-V-1
---	-------

先備：有理數的四則運算，平方根式的化簡 (N-8-1)。

連結：指對數 (N-10-3、N-10-4)。

後續：無窮等比級數，複數 (選修數學甲、乙)。

### 基本說明

- 與 99 課綱的差異  
使用計算機，讓學生能實際透過計算操作而認識十分逼近法的過程，以及十進制小數的意義。從計算的意義，而不藉由冪函數的圖形來認識正數的  $n$  次方根。
- 相關約定
  - 可以用黑板粗體字型的大寫字母 **N**、**Z**、**Q**、**R** 表示正整數、整數、有理數、實數。
  - 不討論負數的  $n$  次方根，不討論負數的非整數次方。
  - 「準至四位小數」或「算到小數點下第四位」的意思是在小數點下第五位做「無條件捨去」(chopping)，而「取四位最近小數」或「約至四位小數」或「約至小數點下第四位」的意思是在小數點下第五位做「四捨五入」(rounding)。例如準至四位小數的  $\pi$  是 3.1415，而約至四位小數的  $\pi$  是 3.1416。小數點下的位數也可以改用十分位、百分位等位名來稱呼。不影響數值的 0 可以寫出來也可以省略，其判斷準則是以溝通的效率來衡量。
  - 非零的實數可轉換成唯一的科學記號數字，形式如  $\pm m \times 10^n$ ，其中  $\pm$  稱為科學記號的「正負號」，當它為正時可以省略不寫； $m$  稱為科學記號的「係數」部分，須滿足  $1 \leq m < 10$ ； $n$  稱為「指數」部分， $n \in \mathbf{Z}$ 。
  - 對非零的數，「取  $n$  位有效數字」的意思是先寫成科學記號的數字，再取它的  $n-1$  位準確小數，也就是在小數點下第  $n$  位做四捨五入。取有效數字之後，未必要以科學記號呈現其值。有效數字之位數，稱為該數之有效位數。

(6) 建議使用  $\approx$  或  $\doteq$  作為近似值，凡是近似值都應使用，例如  $\frac{1}{3} \doteq 0.3333$ 、 $\sqrt{2} \approx 1.4142$ 。

但是因為高中教學現場已經習慣使用等號進行溝通，所以，在前後文脈絡清晰的前提下，可以混用等號 = 與近似符號。學生應該明白，例如「 $\sqrt{2} = 1.4142$ 」是「取  $\sqrt{2}$  之五位有效數字 1.4142 以代之」的意思。

### 3. 學習目標

- (1) 知道有理數與無理數的定義，知道它們十進制小數的區別特徵。
- (2) 延續國中對數線的認識與理解，能作圖找到整數、有理數、平方根式之無理數在數線上的位置。
- (3) 理解十進位制小數的意義，能做有限小數與其等值分數的互化。
- (4) 能進行有理數之分數與小數形式的互化，知道循環小數的特徵。
- (5) 使用計算機做四則、平方根、或任何有限小數次方的運算，並明白其值僅為估計。
- (6) 理解「取三位小數」、「準至千分位」、「以兩位有效數字作計算」等類型的語言，並能用以溝通，例如將任意數依指令寫成正確的概數。
- (7) 理解數線上的點坐標即為實數，而實數可以分成無理數與有理數，後者又可以分出整數與正整數。
- (8) 理解整數與有理數在離散性與稠密性的差異，而有理數雖然稠密卻不能佈滿數線，所以實數不全是有理數。

### 4. 教學斟酌

- (1) 本條目通常實現在教科書的第一冊第一章，特別指出使用計算機，具有宣示的目的。
- (2) 在數線上作圖時，不必拘泥於「尺規」限制，可使用直角板做垂線或平行線、可複製長度、可做一線段的均勻分割。
- (3) 把計算機當作數學實驗的工具，在數學理論未及說明計算機的功能時，可以把它的結果當作客觀存在的事實。在實際的計算情境中，教導科學記號數字與有效數字之觀念。若輸入之值含有概數，結論之有效位數當與之匹配。例如若取  $\pi$  之三位有效數字做計算（亦即令  $\pi = 3.14$ ），則答案仍以三位有效數字為宜。
- (4) 在應用情境中，若由手算，以使用二位或三位有效位數的數值為宜，若由計算機取概數，也不宜要求超過五位；除非有確切需求，不宜刻意提高有效位數。
- (5) 運用計算機，結合十分逼近法，讓學生能具體操作以小數逼近無理數（ $n$  次方根）的過程，並在過程中建立誤差估算的觀念。
- (6) 透過數線上點的前後關係，建立數的大小關係之對應，此認識三一律，並做為未來複數與平面向量不具備大小關係的基礎。
- (7) 在缺乏參照時，諸如「結合律」、「交換律」等抽象性質，不容易產生意義。教師可等到不滿足結合律或不滿足交換律的運算出現時，再介紹這些性質。

### 條目範圍

1. 透過  $\sqrt{2}$  是無理數的證明，讓學生認識反證法，但不列入大考的評量範圍。
2. 根式的化簡以雙重根式及分式的有理化為原則。
3. 此處不用極限觀念探討無理數之「無窮小數」的存在性，所以也不用極限觀念處理無窮循環小數。
4. 本條目不含整數論，特別聲明不討論負整數的因數與倍數。
5. 不刻意探討給定的數字的有效位數問題。

### 釋例

1. 三一律的應用機會之一，是討論  $0.\overline{9}$  與  $1$  的關係。若先承認  $0.\overline{9}$  是一個實數（從它的小數形式來看），則若  $0.\overline{9}$  不等於  $1$  就必定較大或較小。從這裡切入，或許可以帶領學生在概念

上理解  $0.\overline{9}$  與 1 的相等關係。

- 雖然還沒講極限觀念，教師不必迴避無窮循環小數就是一個實數的事實。若先接受這個事實，則  $10 \times 0.\overline{9} = 9 + 0.\overline{9}$  之計算就是合法的。
- 利用無窮循環小數的特徵，可輕易比較  $\frac{71}{100}$  和  $\frac{70}{99}$ （分子和分母各減一）的大小。

### 錯誤類型

- 因為沒有「完備性」的觀念，學生可能以為「稠密性」是實數的特徵，又或許認為稠密即「連續」。教師可引導學生認識有理數即具備稠密性，但它卻還有「縫隙」；這些縫隙可以被無理數填滿。
- 因為  $(-2)^3 = -8$ ，學生容易認定  $\sqrt[3]{-8} = -2$ ，然而在高中數學範疇內，不討論負數的非整數次方。教師倒不必說它們無意義或未定義，也不必急著說明它是一種約定（而如此約定的原因是與稍後的  $a^x = 10^{x \log a}$  一致），只要不刻意討論它就行了。

### 評量

- 無理數的證明不宜列入大考範圍，例如不宜「證明  $\sqrt[3]{4}$  是無理數」及「已知  $\sqrt{2}$  為無理數，證明  $3 + \sqrt{2}$  為無理數」。
- 未介紹極限概念，不宜以無窮等比級數討論  $0.\overline{9} = 1$  之類的問題。
- 未證明  $\sqrt[3]{2}$  無法尺規作圖，不宜出現對一般的正數  $a$  與  $n \geq 2$ ，判斷  $\sqrt[n]{a}$  是否可以尺規作圖之問題。
- 不應出現涉及負數之方根，或負數之非整數次方的問題。
- 避免須刻意禁止使用計算機的評量題目，例如不宜禁止使用計算機而問「 $\sqrt{3} + \sqrt{17}$  在哪兩個連續整數之間」。
- 以下兩種計算策略，所得的數值結果可能有異：(a) 計算過程中，全部以計算機之精度進行，最後依指令寫出概數；(b) 每一步皆取概數，以概數做下一步計算。評量之時，應該接受這類差異，或者以命題方法避免這類差異。務實的情況是，若以器算，則應採策略 (a)，而若筆算，則應採策略 (b)。

<b>N-10-2 絕對值：</b> 絕對值方程式與不等式。	n-V-4
--------------------------------	-------

**先備：**絕對值的意義；以  $|a - b|$  表示數線上兩點  $a, b$  的距離 (N-7-5)，不等式的意義 (A-7-7)，在數線上標示一元一次不等式解的範圍 (A-7-8)。

**連結：**誤差觀念 (N-10-5)。

**後續：**向量的長度，三角不等式 (G-11A-4)，二次曲線的標準式 (G-12 甲-1)，複數的絕對值及其幾何意涵 (N-12 甲-3)。

### 基本說明

- 與 99 課綱的差異

國中階段雖已介紹絕對值的意義及其符號，但僅作紀錄之用，並未涉及絕對值的運算，如下觀念並不屬於國中課程範圍：

$$|a - b| = \begin{cases} a - b, & \text{若 } a > b \\ b - a, & \text{若 } a < b \end{cases}$$

上述概念在 99 課綱為前置經驗，在本課綱則須視為新概念進行引導與概念建立，以便進行絕對值方程式或不等式的教學。

## 2. 相關約定

所謂兩（實）數之差，就是大數減小數。用符號來寫，就把「 $a$  與  $b$  之差」記作  $|a-b|$ 。

## 3. 學習目標

- (1) 能知道絕對值的具體概念為距離，在數線上或坐標平面上兩數相減的絕對值代表此兩數間的距離。
- (2) 能透過判斷數字的大小關係，進行絕對值方程式與不等式成立與否的討論。
- (3) 透過絕對值不等式求得的解，搭配在數線上所呈現的區域，介紹區間符號，並能以區間符號表示絕對值不等式的解。可包括區間的聯集以及  $\pm\infty$  符號。
- (4) 能理解絕對值方程式與絕對值不等式在數線上所代表的距離關係，並透過此距離關係求出所有的解，同時也能將所有可能的解表現在數線上。
- (5) 能將不等式  $|x-a|<b$  與誤差範圍的意義相連結，並能用此形式的不等式表達誤差範圍。

## 4. 教學斟酌

- (1) 本條目通常出現在教科書的第一冊第一章，學生尚未學習到絕對值函數圖形，不應出現以函數圖形方式求解的問題與學習內容。
- (2) 講解絕對值不等式時，應同時採用代數討論及幾何概念兩種方式。使用代數解法時，若使用兩邊平方去絕對值方式，應提醒學生  $0 < a < b$  時， $0 < a^2 < b^2$ ，反之則不成立的概念，在設計問題時，不應出現平方後為  $x$  的二次不等式。
- (3) 進行討論範圍去絕對值的過程中，應強化以下兩種觀念：
  - 對於前提條件及原不等式解需取交集
  - 對於分段討論取不同範圍所求得的解，彼此間則需取聯集。
- (4) 可設計絕對值不等式的聯立方程組，但僅以兩個不等式為限。

## 條目範圍

1. 不含兩層或更多層的絕對值方程式或不等式，例如不含  $||x-2|-2|\leq 3$  之解。
2. 不含絕對值函數圖形及其相關解個數的問題。
3. 不含三角不等式，推遲到 11 年級的 A 類課程。
4. 區間符號僅作記錄之用，不含任何集合運算。同理， $\pm\infty$  也僅用作「無界」區間之記號，不討論其運算性質。

## 釋例

1. 某果汁飲料中，含糖比例為  $30\% \pm 5\%$ ，代表 |實際糖份比 - 30%| < 5%。
2. 可利用  $|x-2|=3$ ，在數線上的解為  $x=-1$  或  $x=5$ ，建立學生以 2 為中心，找出距離為 3 的兩個位置，即為  $x=-1$  或  $x=5$ 。接著再利用此題，請學生思考，當絕對值方程式之解為  $x=-1$  或  $x=5$  時，其絕對值方程式應為  $|x-2|=3$ ，以強化學生對於絕對值以數線上距離概念思考的連結。

## 錯誤類型

1.  $2|x+2|+|x-3|<5$ ，需分三段進行討論，忽略拆絕對值時的前提條件，而求得錯誤答案。
2.  $|x-2|>x$ ，僅能分段討論，不能使用兩邊同時平方的解法。

## 評量

1. 分式型絕對值不等式如：解不等式  $\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\leq 2$ ，不宜作為本條目之評量問題。
2. 絕對值方程式或不等式之討論以一次為原則，例如：解不等式  $|x^2-3x|+4x-6\geq 0$ ，不宜作為本條目之評量問題。

- 不宜出現需使用三角不等式解絕對值方程式概念的問題。如：解  $|x-5|+|2x+3|=|3x-2|$ 。
- 不宜出現由多個絕對值所組成之函數求極值問題。如：求  $|x+3|+|x+2|+|x-1|+|x-7|$  的最小值。

<b>N-10-3 指數：</b> 非負實數之小數或分數次方的意義，幾何平均數與算幾不等式，複習指數律，實數指數的意義，使用計算機的 $x^y$ 鍵。	n-V-1
---	-------

**先備：**整數指數律。

**連結：**科學記號數字 (N-10-1)、對數 (N-10-4)。

**後續：**指數函數 (F-11A-4、F-11B-2)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

(1)  $a^0 = 1$  的定義，99 課綱是在國中時定義，107 課綱則放在本條目中。

(2) 99 課綱用單項函數  $x^n = a$ ，其中  $a > 0$ ，之正根定義  $a^{1/n}$ ，本條目意欲由計算的意義而直接定義  $a^{1/n}$ ，不經過單項函數的圖形與求根的過程。99 課綱無計算機相關內容。

#### 2. 相關約定

(3) 討論負數的非整數次方。原因是未來要建立  $x^y = 10^{y \cdot \log x}$  之概念，而高中階段一律規定  $\log x$  的定義域為  $x > 0$ 。

(4) 分數指數可以寫成橫列的形式，例如  $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1/2}$ 。

#### 3. 學習目標

(1) 複習整數指數的指數律，並由此概念，定義  $a^0 = 1$  及分數指數與有限小數的指數，並推廣整數的指數律到分數與有限小數。

(2) 用計算機求得  $x^y$  的數值，並理解它「通常」應為無理數，而計算機的結果是近似值。

(3) 能解讀計算機顯示很大或很小的  $x^y$  計算結果，例如  $3^{200}$ ，並報讀或記錄為指定有效位數的科學記號數字；也能判讀超出計算機處理能力的  $x^y$ ，例如  $2^{1025}$  和  $2^{-1075}$ 。

(4) 知道無理數指數也符合指數律，亦即指數律對所有實數皆成立（但非整數指數僅作用在 0 或正數上）。

(5) 介紹算術平均數與幾何平均數的概念及定義，透過代數及幾何方式進行算幾不等式證明，並應強調等號成立的條件。

#### 4. 教學斟酌

無理數指數（例如  $2^{\sqrt{3}}$ ）也是有意義的，但是實際計算時，它也僅能從  $\sqrt{3}$  的近似值做  $2^{1.732\dots}$  來代替  $2^{\sqrt{3}}$ ，所以  $2^{\sqrt{3}}$  的存在性是一個概念性的問題，沒有計算上的困難。因此，建議不必主動教導這個理論的細節。當學生有疑問或者有能力理解時，教師可以用逼近無理數之有效位數越來越多的有限小數來闡述其意義（例如 2,  $2^{1.7}$ ,  $2^{1.73}$ ,  $2^{1.732}$ , ... 越來越靠近某個固定的數，那個數就是  $2^{\sqrt{3}}$ ），也可以將此概念的說明延宕到學習了指對數函數之後。無理數指數之所以難以解釋的根本原因，是它不再能使用「連乘」的意義來說明。前段建議之解釋方法，涉及極限概念或者連續概念，皆不宜以嚴格的理論形式教學。建議善用計算機，以具體的數值展現「逼近」的現象。事實上，如果教師並不在此條目範圍內針對無理數指數設計評量問題，則學生暫時沒有理解無理數指數的迫切性，只要接受其存在，能依指數律操作其運算，並且能用計算機操作其近似值即可。因此，教師可以將這個課題移到學習了指對數函數之後再詳細說明。說明的方式之一是定義  $x^y = 10^{y \cdot \log x}$  然後將實數指數的存在性推給指數函數與對數函數的連續性。但即使這樣說，還是有未竟之處，徹底的處

理方式無法避免極限觀念，無法在高中階段真正講清楚，所以，關於無理數指數的存在性與其指數律，總免不了「告知」的成分。既然或多或少都得「告知」，就直接宣稱它「存在」即可。

### 條目範圍

本條目僅止於指數符號的認識與了解，再搭配計算機的  $x^y$  鍵，讓學生了解  $2^{\frac{2}{3}}$ 、 $2^{3.14}$  類型之實數指數的意義與近似值，讓學生更確切地感受指數的大小。有關指數函數或指數代數型式的操作，皆不屬於此條目。

### 釋例

1. 透過生活中、故事裡或寓言式的例子，讓學生感受指數的成長或衰退。例如：將一張厚度 0.01 公分且足夠大的紙，對摺 10 次的厚度為幾公分？如果能夠一直對摺，幾次以後會比 101 大樓還高？
2. 創造一個需要對科學記號數字開方的情境，特別是指數為奇數的情況。

### 錯誤類型

1. 非整數指數僅在底數為正數時才有意義，例如，雖然  $-2$  是  $x^3 = -8$  的一個解，但是  $\sqrt[3]{-8}$  並不是  $-2$ ，而且  $((-2)^{\frac{1}{2}})^2 = -2$  並不正確。
2. 透過計算機的操作是一種估算且會有誤差。例如  $10^{0.1}$  得到的是 1.258925411，理論上  $(10^{0.1})^{10} = 10^1$ ，但是若算  $(1.2589254118)^{10}$  卻會得到  $10.0000000005 \neq 10$ 。此處應該強調有效位數的選取，進而決定只需要選擇估算的位數。並讓學生了解任一數的小數或分數次方「通常」不是個有限小數。
3. 算幾不等式的誤用。例如：已知  $a, b$  是正實數，若  $3a + 2b = 15$ ，求  $ab$  的最大值。學生誤解：因為  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  等號成立的條件為  $a = b$ ，又  $3a + 2b = 15 \Rightarrow a = b = 3$ ，所以  $ab$  的最大值為  $3 \times 3 = 9$ 。

### 評量

1. 分此節以認識實數指數符號為原則，過多的代數操作不適宜作為此節的命題內容，例如：  
若  $a > 0$ ，且  $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 4$ ，求  $a^{\frac{5}{2}} + a^{-\frac{5}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$  為不宜的題目。
2. 不過度針對無理數指數做評量。
3. 有關指數函數性質的考題皆不為此節的評量範圍，應避免。  
例：  $x, y, z \in \mathbb{R}, xyz \neq 0$ ，已知  $3^x = 5^y = 15^z$ ，求  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$  之值。
4. 算幾不等式的相關應用例題僅限於兩個變數。例如：若  $a + b = 15$  求  $a^2b$  之最大值的題型不適宜作為考題。
5. 不宜在這裡出現根式的代數運算問題，應強調計算機處理小數或分數次方所得結果與目標數值的誤差。

例：  $\frac{1}{a^5} \times (a^2)^4 \times \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}} \times (a^3)^2$ 。

**N-10-4 常用對數：**log 的意義，有效位數與科學記號連結，使用計算機的  $10^x$  鍵和 log 鍵。

n-V-1

先備：概數 (N-4-4)、指數律 (N-7-7)、科學記號 (N-7-8 與 N-10-1)。

**連結：**指數 (N-10-2)、有效位數 (N-10-1)、數值計算的誤差 (N-10-5)、等比級數與求和公式 (N-10-6)。

**後續：**對數律 (A-11A-4)、指數函數與對數函數 (F-11A-4)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

- (1) 使用計算機，讓學生能實際透過計算操作而認識對數的意義，並能將它當作一種紀錄和表達數值的記號，並非直接定義對數隨即進行代數操作，也不透過指數函數的圖形講解對數。在整個課綱設計的理念上，希望諸如 $\sqrt{\quad}$ 、 $\sin$ 、 $\log$ 、行列式、向量、方陣等新物件，都能先以記號的意義出現，讓學生有機會在具體情境中使用它，然後才進入代數關係的層次，最後才進入變化與關係的層次。
- (2) 對數運算性質移至高二，這裡著重對數的意義。

#### 2. 相關約定

在求解  $f(x) = b$  的情境中，「取二位準確小數」或「準至二位小數」或「準至小數點下第二位」的意思是： $x$  是使得  $f(x)$  與  $b$  誤差最小的二位小數；當此數不唯一時，依情境做個案處理。例如求解  $10^x = 3$  時， $10^{0.477} \approx 2.99985$ ，誤差不到 0.0003，而  $10^{0.477} \approx 3.00054$ ，誤差超過 0.0004，用計算機實驗觀察其他四位小數造成的誤差更大，所以準至四位小數的解是  $x = 0.4771$ 。

#### 3. 學習目標

- (1) 能用計算機的  $x^y$  功能，探索形如  $(1.01)^x = 2$  之方程式的近似解。
- (2) 理解計算機的  $10^x$  功能是  $x^y$  的特殊化，明白此特殊化的緣由是我們使用「十進制」計數系統，並能用計算機估計指定位數的  $10^x = a$  近似解。
- (3) 理解  $\log a$  的意義就是  $10^{\log a} = a$ ，其中  $a$  為正數。反之，任意正數  $a$  都可以改寫成  $10^{\log a}$ 。能用  $\log$  符號紀錄或表達數值。
- (4) 能轉換科學記號數字與 10 的幕次，藉以理解  $\log$  數值之整數與小數部分的意義，並建立 10 的幕次與對數的數感（亦即不使用計算機而粗略估計 10 的幕次或對數的值）。

#### 4. 教學斟酌

- (1) 建議讓學生先熟悉  $10^{0.3010} = 2$ 、 $10^{0.4771} = 3$  的近似值表達方式，再以指數律理解  $10^{0.7781} = 6$ 、 $10^{1.4771} = 30$ 、 $10^{-1.6990} = 0.02$  的近似值表達方式。最後才引入符號  $\log 2 = 0.3010$ 。
- (2) 把計算機當作數學實驗的工具，在數學理論未及說明計算機的功能時，可以把它的結果當作客觀存在的事實。在實際的計算情境中，教導科學記號數字與有效數字之觀念。
- (3) 若  $10^a = 10^b$  則可以推論  $a = b$ ；此事實隱含一個前提，即  $10^x$  是一對一函數，但是只要學生依照計算的經驗接受上述事實，教師可以不多做闡述。在學生能夠理解的條件下，可提醒學生這類關係未必成立，例如  $a^2 = b^2$  不能推論  $a = b$ 。

### 條目範圍

1. 僅介紹以 10 為底的常用對數符號，不講其他底數也沒有換底公式。
2. 不介紹對數函數，所以不宜介紹遞增遞減性質及內插法。
3. 本條目不含「 $\log 2$  為無理數」的證明。
4. 含指數或對數的方程式或不等式應在高二學習對數函數後再學習。

### 釋例

1. 不使用計算機，判斷  $10^{1.01}$ 、 $10^{0.4771}$  分別最接近哪一個整數，並說明理由。
2. 不使用計算機，判斷  $\log 34567$  介於哪兩個整數之間，並說明理由。
3. 待學生對 10 的幕次表示法熟練後，可以與化學科連結，計算 pH 值；例如將 pH 值 3 與 pH

值 4 的溶液等體積混合之後，ph 值會是 3.5 嗎？

### 錯誤類型

以  $\log$  定義的度量，關心的是 10 的冪次，例如地震的級數、酸鹼度、聲音的響度等。在這些度量裡，級數 1 並不是級數 2 的一半，兩種級數的「平均」也不是算術平均數。

### 評量

1. 不使用對數律來幫助計算，若涉及指數方程式，僅限  $a^x = b$  且  $0 < a \neq 1$  的情況。
2. 不使用首數與尾數的名詞，應以科學記號的表達法來理解一個數為幾位數。
3. 有不介紹對數函數，因此應避免使用遞增遞減性質來比較數值的大小，如「比較  $\log_{10}\sqrt{2}$ 、 $\log_{10}3$  與  $\log_{10}\pi$  的大小」為此階段學習不宜出現的評量試題。

<b>N-10-5 數值計算的誤差：</b> 認識計算機的有限性，可察覺誤差的發生並做適當有效位數的取捨。#	n-V-2
--	-------

連結：所有使用計算機求值或求解的情形。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

以前不在課綱裡放置計算機相關內容，所以沒有討論誤差的必要性，這是新的課題。此外，以前的高中課綱都類似教材章節的大綱，所以也沒有這類「不設置獨立教學單元，融入適當課題，在合理的脈絡中教授」的綱要條目。

#### 2. 相關約定

- (1) 所謂「誤差」就是指「絕對誤差」，亦即估計值與理論值之差。
- (2) 在課綱文件裡「計算機」有時也稱為「計算器」，意指英文的 Calculator，並非 Computer；後者稱為「電腦」。

#### 3. 學習目標

- (1) 能理解計算機的「有限性」可以做以下類比：一律採用係數部分限定為三位有效位數，且指數部分限定在  $\pm 9$  之間的科學記號數字做計算（除了 0 以外），但是在宣告答案時必須將係數的最後一位四捨五入，給出兩位有效數字的結果。如此限制所產生的誤差，本質上就是計算機的有限性誤差。計算機硬體的擴充可以提高係數的有效位數與指數的位數，得計算結果顯示較多的數字，但是永遠無法克服其有限性。所以，計算機產生的結果（幾乎）必有誤差。
- (2) 能察覺計算結果可能是一個循環小數，例如  $1.66666667$  可能是  $1.\bar{6}$ ，但是不論它是或不是  $\frac{10}{6}$ ，都只能由數學來論證而不能從數值判斷。但是，在適當的誤差範圍內，可以用  $\frac{10}{6}$  代替  $1.66666667$ 。
- (3) 能理解當有理數的小數循環節太長，就無法從計算結果讀出循環小數。
- (4) 能測試一部計算機的表現是「取到」還是「準到」最後一位有效數字，亦即是否在其下一位做過四捨五入；例如可以用  $\frac{1}{6}$  的小數做此測試。
- (5) 能理解科學記號指數部分的有限性造成「溢位」(Overflow)和「歸零」(underflow) 的



現象。

(6) 能根據科學記號數字相加(減)的算則,理解係數部分的有限性會導致小數消失的現象。

#### 4. 教學斟酌

(1) 本條目的內容不宜集中在一堂課或一個單元裡教授,宜伴隨著學生操作計算機的經驗以及課程對計算機的需求,在適當的時機逐步教授。

(2) 如果學生發現溢位和歸零的指數並「不對稱」:即使 $10^N$ 發生溢位, $10^{-N}$ 未必歸零,那是因為計算機採取了一種例外措施。當計算機裡的科學記號指數部分已經達到最小值的時候,係數部分就採取例外措施,容許它小於 0。教師可指出方向,讓學生自行探索。使用計算機之後,讓部分的數學變成像自然科學一樣,有了觀察的對象。不妨讓學生去觀察。

(3) 如果學生發現溢位產生的 **Inf** 還可以繼續做計算,將會發現它具備一些特殊的計算性質。這些性質跟 $\infty$ 的運算性質吻合,學生並不會因此被誤導。如前述,不妨讓學生去觀察並歸納。當有人發現 $0 \times \infty$ 或者 $\infty - \infty$ 的結果不再是數值或 **Inf** 的時候,教師可以引導學生認識這方面的數學,有可能啟發學生的好奇心。如果計算機顯示 **NaN**,那是 **Not a Number** 的縮寫。請注意,這些現象並非有限性所造成的誤差。

(4) 類似於前款, $1 \div 0$ 、 $0 \div 0$ 、 $0^0$ 的計算結果也不會出現誤差,其結果應該符合數學理論或慣例。學生如果當時無法理解,教師不妨告知「這是計算機工業根據數學原理而共同制訂的標準」。

#### 條目範圍

1. 本條目僅涉及計算機的有限性所造成不吻合數學理論的狀況,不討論演算法造成的穩定性或收斂性課題。

2. 本條目不含誤差的傳播或擴散現象,也不要延伸到任何誤差分析的課題。

#### 釋例

##### 錯誤類型

1. 當計算結果顯示 $9.999999999 \times 10^{-7}$ ,學生照實抄錄下來,或者直接認定它就是 $10^{-6}$ ,都不正確。如果指定以三位有效位數作答,則可以回答 $10^{-6}$ ,否則應該懷疑它是 $10^{-6}$ ,並設法以數學方法論述之。

2. 雖然 $\frac{1}{19}$ 應該等於循環小數,但是它的循環節有 18 位數(052631578947368421), $\frac{1}{29}$ 更長達 28 位,超出大多數計算機的顯示位數,所以因為計算機的有限性而無法顯示循環節,學生可能誤以為它不是循環小數。並非所有單位分數的循環節長度都接近分母,例如 $\frac{1}{27}$ 的循環節只有 3 位。

3. 如果一個數的絕對值太大,超過了計算機所能處理的上限,可能會顯示 **Inf** 或 **-Inf**,它是 **infinite** (無窮)的縮寫,但那並不是數學符號 $\infty$ 的同義符號。相對的,如果一個數的絕對值太小,就會歸零,可能會顯示 0 或 **-0**。

4. 因為計算機內有效位數的限制,1 加很小的正數(但不至於小到歸零)結果卻仍可能等於 1。發生此現象的最大正數,稱為此計算機的「機器精度」(**machine epsilon**)。

#### 評量

1. 在數學課裡使用計算機是為了輔助數學的學習，不應刻意評量計算機產生誤差的原因，也不應利用計算機的誤差而設計評量的誘答方向。
2. 不應要求學生僅根據小數數值而猜測其整數或分數的值。

<b>N-10-6 數列、級數與遞迴關係：</b> 有限項遞迴數列，有限項等比級數，常用的求和公式，數學歸納法。	n-V-5
--	-------

**先備：**已認識常見的數列（等差、等比）及其規律性（包括圖形的規律性），並能由給定條件求其一般項（N-8-3、N-8-4、N-8-6）、能利用等差級數求和公式解決生活中相關的問題（N-8-5）。

**連結：**利用求和公式處理一維數據及二維數據的相關統計量（D-10-2）。

**後續：**做為學習無窮數列與級數的基礎（N-12 甲-1、N-12 甲-2、N-12 乙-2）。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

- (1) 國中階段已介紹等比數列的一般項求法，但並未涉及其逆向命題，不同於 99 課綱是在高中階段才正式介紹等比數列，此處可將國中的學習經驗作為出發點，並引導學生做逆向問題之思考。
- (2) 99 課綱在此條目有介紹  $\Sigma$  符號及其相關性質，本條目則是不介紹  $\Sigma$  符號及其相關性質，僅透過條列方式，讓學生具體熟悉與練習有限項級數和的運算及處理方法。

#### 2. 學習目標

- (1) 能觀察並具體操作具有規律的數列或圖形，並寫出其遞迴關係式及一般項。
- (2) 能由所給定的條件求出等比數列或等比級數的一般項及項數。
- (3) 能利用遞迴關係式推導出常用求和公式。
- (4) 能了解數學歸納法中所蘊含的遞迴關係，並加以運用作為證明的方法。

#### 3. 教學斟酌

- (1) 數列或圖形規律應強調其遞迴關係的建立與連結，若能同時具有與項數或圖形特徵的相關性，會更能協助學生學習此觀念。
- (2) 應介紹等比級數求和公式之推導過程，但不宜將此處理方法延伸至循環小數轉換為分數的問題，因為此處涉及無窮級數與極限的概念，所以在教學設計上勿做過度的延伸。
- (3) 可透過學生熟悉的等差數列及等比數列一般項，帶出以累加法及累乘法處理具有遞迴關係的數列一般項，再進一步引入其他的遞迴關係式求一般項的問題。此處的遞迴關係式若能搭配圖形或數列規律，引導學生先進行歸納、臆測，最後再以代數運算進行推論的驗證，可以讓學生完整體驗數學思考的歷程。同時也要引導學生思考，觀察有限項所做的臆測，不見得正確，需經過驗證的過程才能確認其正確性，此處可選擇適當的例子做為說明。
- (4) 由遞迴關係式推演出一般式的問題以一階為限，但若僅止於遞迴關係式的觀察，則不受此限。（如：費氏數列）
- (5) 可透過代數運算或圖形規律的設計，引導學生進行常用求和公式的推導，僅限於

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad , \quad 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{及}$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2, \text{ 不宜過度延伸其他的級數求和問題。}$$

- (6) 數學歸納法的引入是以做為遞迴關係的應用為出發點，因此有關數學歸納法的學習素材選擇，應同時兼顧遞迴關係式及一般式，並應引導學生進行歸納、臆測、驗證，讓學生完整體驗數學思考的歷程。

### 條目範圍

1. 學生尚未有無窮級數及極限的概念，不宜出現循環小數化為分數的問題。
2. 數學歸納法強調為遞迴關係的應用，此處不宜出現不等式型的數學歸納法問題。
3. 數學歸納法以第一型為限，不宜出現第二型數學歸納法的問題。
4. 由於  $\sum$  符號及其相關性質留待 12 年級才正式介紹，因此涉及  $\sum$  相關運算性質的問題，不宜在此處出現。

<b>N-10-7 邏輯：</b> 認識命題及其否定，兩命題的或、且、推論關係，充分、必要、充要條件。★ #	n-V-6
--	-------

**先備：**畢氏定理以及平面幾何的推理。

**連結：** $\sqrt{2}$  是無理數的證明，各單元中的性質、定理敘述與證明。

### 基本說明

1. 與 99 課綱的差異
 

99 課綱在附錄中介紹命題、充分條件、必要條件、充要條件、反證法等邏輯課題。本課綱雖移入課文中，但不另立章節，搭配課程正常進度中的數學命題說明這些概念，並隨時予以連結和印證。
2. 相關約定
  - (1) 原則上我們只在數學課程中討論數學命題，亦即可以用數學知識判斷真偽的直述句。
  - (2) 若 P 表示一個命題，符號「 $\neg P$ 」代表 P 的否定，又稱為非 P。
  - (3) 「且」和「或」用文字描述，不用符號。
  - (4) 符號「 $P \Rightarrow Q$ 」代表若 P 則 Q。當「 $P \Rightarrow Q$ 」成立時，稱 P 為 Q 的充分條件，Q 為 P 的必要條件。
  - (5) 以符號「 $P \Leftrightarrow Q$ 」表示「 $P \Rightarrow Q$ 」且「 $Q \Rightarrow P$ 」，此時稱 P、Q 互為充要條件。
  - (6) 當 P 和 Q 兩個命題同時為真且同時為偽時，稱它們等價；若要使用符號，建議  $P \equiv Q$ 。
3. 學習目標
  - (1) 認識、理解並能操作數學命題的否定命題。例如  $x > 0$  的否定為  $x \leq 0$ ，正整數  $n$  為質數的否定為  $n = 1$  或是合數， $\sqrt{2}$  為無理數的否定是  $\sqrt{2}$  為有理數。
  - (2) 理解「或」和「且」的意義，並能有效溝通。例如  $|x-1| \leq 1$  的解區間和  $|x-1| > 1$  的解區間分別該用「且」還是「或」來描述？（此處可以順便再講解一次：符號  $-1 \leq x \leq 1$  的意義是  $x \geq -1$  且  $x \leq 1$ 。）
  - (3) 理解並能操作用「或」或「且」連接的複合命題之否命題。例如前項之兩個解區間互為否命題。

- (4) 理解「充分」、「必要」、「充要」條件的意義，並能有效溝通。例如「 $\triangle ABC$  是直角三角形」是「 $\triangle ABC$  之三邊長滿足  $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$ 」的哪一種條件？「 $\angle A$  為銳角」是「 $\sin A > 0$ 」的哪一種條件？
- (5) 理解「反例」的意義，並能用以判斷命題之偽。例如「 $x^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$ 」之偽。
- (6) 理解「等價」的意義，並理解數學定義皆為等價的意涵。例如正整數  $n$  為偶數等價於存在正整數  $k$  使得  $n = 2k$ ， $\sqrt{2}$  為有理數的假設等價於存在正整數  $n, m$  使得  $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ 。
- (7) 理解  $P \Rightarrow Q$  與其對偶命題  $\sim Q \Rightarrow \sim P$  等價，並能應用此等價關係。例如若平面上的曲線沒有對稱軸，則它不是二次函數的圖形。
- (8) 理解  $P \Rightarrow Q$  與其逆命題  $Q \Rightarrow P$  不等價，例如「若實數  $x > 0$  且  $y > 0$  則  $xy > 0$ 」正確但是其逆命題錯誤。認識充分但不必要的條件，如前例。
- (9) 理解  $P \Rightarrow Q$  與其否逆命題  $\sim P \Rightarrow \sim Q$  不等價，如前項的例子。
- (10) 從  $\sqrt{2}$  是無理數的證明，認識反證法：若一命題  $\sim P$  導致矛盾，則  $\sim P$  為偽而  $P$  為真；所謂矛盾的意思是，可推論某命題  $Q$  與  $\sim Q$  同時為真。

#### 4. 教學斟酌

- (1) 避免使用自然語言的敘述作為邏輯的例證。因為自然語言（特別是中文）有很多模稜兩可或者「歧義」的可能，而且自然語言的陳述跟環境有關，其前提隱諱不明，所以，拿它們當作邏輯的例子，經常造成麻煩，反而讓師生進退維谷無所適從。適當的作法，就是在數學課裡，數學老師專注於「數學命題」的邏輯就好了。至於學生是否將邏輯應用到「生活」和「言談」中，由其他領域的教育來補充。
- (2) 邏輯概念搭配數學課程之學習內容中需要的數學定義、定理、性質、條件來學習，第一次出現的概念為介紹，爾後遇到的同樣概念則為增強其理解。不要另立主題，也不針對邏輯而評量。
- (3) 複合命題「 $P$  且  $Q$ 」、「 $P$  或  $Q$ 」的否定命題，可與集合中的笛摩根定律一併教學。

#### 條目範圍

不衍生形式性邏輯運算，不含真值表。

#### 釋例

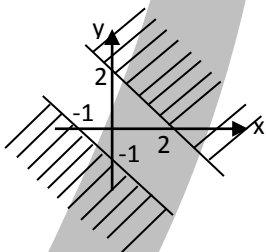
- 學生較難理解複合命題「 $P$  且  $Q$ 」、「 $P$  或  $Q$ 」的否定命題，搭配易懂的數學概念陳述。例如「 $a=0$  或  $b=0$ 」的否定敘述為  $a \neq 0$  且  $b \neq 0$ ，學生對於「或」、「且」的概念模糊，可試著讓學生理解題目等同於「 $ab=0$ 」的否定敘述「 $ab \neq 0$ 」，再轉為  $a \neq 0$  且  $b \neq 0$ 。
- 以實例說明「 $P \Rightarrow Q$ 」成立時，「 $Q \Rightarrow P$ 」不一定會成立；以及「 $\sim P \Rightarrow \sim Q$ 」和「 $\sim Q \Rightarrow \sim P$ 」這兩者的區別。例如：「若  $x > 0$ ，則  $y > 0$ 」成立時，則可以推出下列哪一個敘述亦成立？
  - 若  $x \leq 0$ ，則  $y \leq 0$ 。
  - 若  $y \leq 0$ ，則  $x \leq 0$ 。
  - 若  $y > 0$ ，則  $x > 0$ 。
  - 若  $x > 1$ ，則  $y > 0$ 。
  - 若  $y < 0$ ，則  $x \leq 0$ 。
- 學校規定上學期成績需同時滿足以下兩項要求，才有資格參選模範生。一、國文成績或

英文成績 70 分(含)以上；二、數學成績及格。已知小文上學期國文 65 分而且他不符合參選模範生資格。請問下列哪一個選項的推論正確？

- (A) 小文的英文成績未達 70 分。
- (B) 小文的數學成績不及格。
- (C) 小文的英文成績 70 分以上但數學成績不及格。
- (D) 小文的英文成績未達 70 分且數學成績不及格。
- (E) 小文的英文成績未達 70 分或數學成績不及格。

### 錯誤類型

- 學生不能了解「 $P \Rightarrow Q$ 」成立時，「 $Q \Rightarrow P$ 」不一定會成立的觀念；以及「 $\sim P \Rightarrow \sim Q$ 」、「 $\sim Q \Rightarrow \sim P$ 」這兩者的區別。
- 「或」、「且」概念搭配圖形，難度增加。例如：  
下方不等式圖形，小安說其對應式子為  $(x+y-2)(x+y+1) \geq 0$ ，小花說是  $x+y \geq 2$  且  $x+y \leq -1$ ，判斷兩人的對錯。



### 評量

- 此條目不單獨評量。每一數學學習單元都會有邏輯概念，搭配學習內容做邏輯的培訓即可，不刻意單獨評量邏輯。
- 可搭配集合單元，結合「或」、「且」與「聯集」、「交集」概念，做整合評量。

<b>G-10-1 坐標圖形的對稱性：</b> 坐標平面上，對 $x$ 軸，對 $y$ 軸，對直線 $x=y$ 的對稱，對原點的對稱。	g-V-2
---	-------

**先備：**線對稱 (S-7-4、S-7-5)，三角形的全等。

**連結：**直線方程式 (G-10-2)、圓方程式 (G-10-3)、一次與二次函數圖形 (F-10-1)、廣義三角比(G-10-6)。

**後續：**指數函數與對數函數 (F-11A-4)、三角函數圖形 (F-11-A-1, F-11-B-1)。

### 基本說明

- 與 99 課綱的差異  
99 課綱並未明訂這些學習目標。
- 相關約定  
所謂兩點  $P$  和  $P'$  對稱於點  $Q$  的定義是  $Q$  位於線段  $PP'$  的中點。
- 學習目標  
不必訂定獨立的單元，將這些對稱性一次講完。搭配適當的學習單元中，介紹坐標平面上（而非一般平面上）點與點的特殊對稱關係，包括：

(1) 點  $P(a, b)$  對稱於  $x$  軸的點是  $P_1(a, -b)$ ；

- (2) 點  $P(a,b)$  對稱於  $y$  軸的點是  $P_2(-a,b)$  ；
- (3) 點  $P(a,b)$  對稱於原點的點是  $P_3(-a,-b)$  ；
- (4) 點  $P(a,b)$  對稱  $y = x$  直線的點是  $P_4(b,a)$  。

以上關係的推論，可連結國中的直角三角形之全等性質。點對稱的觀念穩固之後，再介紹圖形與圖形的（前述）特殊對稱關係。

#### 4. 教學斟酌

- (1) 應提供學生循序漸進的學習機會；建議讓學生先由描點的方式，理解到點與點對稱的情形與特性，再擴及圖形與圖形的對稱關係。
- (2) 學生應可理解圖形自身的對稱性，如二次函數的圖形有對稱軸的意義，但圖形自身對稱於  $y$  軸，與對稱於原點分別稱為偶函數與奇函數的名稱可在 F-12 甲-1 時再介紹。
- (3) 可使用數學軟體輔助教學。
- (4) 在高一時，學生函數觀念尚未鞏固，所以不必使用抽象符號如：圖形  $y = f(x)$  與  $y = -f(-x)$  對稱於原點。

#### 條目範圍

本條目是在坐標平面上的特殊對稱關係，不涉及一般的線對稱與點對稱。

#### 釋例

1. 判斷直線  $y=2x$  分別對稱於 (1)  $x$  軸 (2)  $y$  軸 (3)  $x=y$  直線的圖形，並探討其斜率。
2. 討論如何將  $f(x) = x^2$  的函數圖形，經由對稱與平移，得到  $y = 1 - (x - 3)^2$  的圖形。
3. 在說明三角比之補角、負角或餘角性質時，可運用或連結廣義角終邊的對稱性。

#### 評量

宜評量課內提及的圖形即可， $y = |x - 1|$  的圖形宜在 F-12 甲-1 中再提及。

<b>G-10-2 直線方程式：</b> 斜率，其絕對值的意義，點斜式，點與直線之平移，平行線、垂直線的方程式。點到直線的距離，平行線的距離、二元一次不等式。	g-V-4
---	-------

**先備：**二元一次方程式與聯立方程式，一元一次不等式，平行與垂直，線對稱，直角三角形的三角比（國中階段）。

**連結：**絕對值，廣義角和極坐標，廣義角的三角比（G-10-5,6），一次函數（F-10-1）。

**後續：**平面向量及其運算（G-11A-1,6、G-11B-1,2）。

#### 基本說明

##### 1. 與 99 課綱的差異

直線方程式從 11 年級挪到了 10 年級，看似恢復了 95 暫綱的安排，但是本條目的設計內涵還是比較接近 99 課綱的想法，亦即以直線方程式導引出各種基本的坐標方法，作為向量方法的前置經驗與動機。

##### 2. 相關約定

- (1) 直線方程式和（平面上的）二元一次方程式可視為同義詞。

- (2) 鉛直線沒有斜率。斜率的絕對值較大時，說直線較「陡」。
- (3) 當直線方程式  $ax + by + c = 0$  可以寫成  $y = mx + k$  形式時，可以說  $y$  是  $x$  的函數，其中  $x$  是自變數而  $y$  是應變數；若可以寫成  $x = py + q$  形式，可以說  $x$  是  $y$  的函數，此時  $y$  是自變數而  $x$  是應變數。國中階段已經有函數觀念，可以與之連結，但是本條目不寫  $f(x)$  這種函數符號。
- (4)  $L: y = 2x$  表示直線  $L$  的方程式是  $y = 2x$
- (5)  $d(P, L)$  表示點  $P$  到直線  $L$  的距離， $d(L_1, L_2)$  表示兩平行線  $L_1$  和  $L_2$  的距離。
- (6) 可善用  $\perp$  符號，稱之為「垂直符號」，唸 **perp**（是 **perpendicular** 的簡寫）。  
例如  $L \perp M$  表示直線  $L$  與  $M$  互相垂直， $L^\perp$  表示直線  $L$  的垂直線， $m^\perp$  表示垂直於斜率為  $m$  之直線的斜率。
- (7) 原則上以語文描述「將變數  $x$  置換成  $x - h$ 」，教師在適合的班級中，可約定使用  $x \mapsto x - h$  之置換符號。

### 3. 學習目標

- (1) 理解坐標數值的加減，造成點在坐標平面上的平移效果。
- (2) 知道斜率的定義，能從二元一次方程式計算斜率，理解滿足方程式  $ax + by = 0$  的所有點  $(x, y)$  聚集成通過原點且斜率為  $-\frac{a}{b}$  的直線（當  $b \neq 0$ ）。
- (3) 理解斜率相等的（不同）直線皆彼此平行，因此認識到任何直線都是通過原點之同斜率直線的（水平或鉛直）平移；而若限定其通過原點，則斜率與直線是一一對應的。在技術上，能操作直線的水平與鉛直平移，並能用以化簡問題。
- (4) 將直線  $L: ax + by + c = 0$  的  $x$  置換成  $x - h$  時，直線左右平移  $h$  單位，將  $y$  置換成  $y - k$  時，直線上下平移  $k$  單位。通過原點且與  $L$  平行的直線是  $L_0: ax + by = 0$ ； $L$  是  $L_0$  的水平「或」鉛直平移，平移的量就是  $L$  的  $x$  截距或  $y$  截距。
- (5) 給定原點以外的一點  $P(a, b)$ ，理解  $P^\perp(-b, a)$  使得線段  $OP^\perp$  是  $OP$  往逆時鐘方向旋轉直角的結果（盡量使用基本的全等三角形技術來推論）；而利用點對稱，得知  $P'(b, -a)$  使得線段  $OP'$  是  $OP$  往順時鐘方向旋轉直角的結果。斜率互為「相反倒數」的直線彼此垂直。
- (6) 理解並能運用點到直線的距離公式，擴及兩平行線的距離公式。
- (7) 能根據情境設立二元一次不等式，理解其「解」的意義，並能在坐標平面上畫出「解區域」的圖示。能以線型不等式表示坐標平面上（含或不含直線）的半平面區域。

### 4. 教學斟酌

- (1) 應國中階段已經知道二元一次方程式的圖形是直線，且在平面幾何的層次上理解關於平行線與垂直線的基本性質，本條目的學習要確實建立在這些基礎上，進一步以斜率連結所有相關的既有知識，並發展新的坐標幾何方法，展現坐標的功能。
- (2) 以下性質可以當作已知而不再闡述：平面上兩平行線存在公垂線，且這些公垂線互相平行。可以定義平面上的平行線為同時垂直於某直線的兩條直線。

- (3) 關於直線的任何性質或公式，都盡量從通過原點的直線開始學習，再以平移手段獲得一般化的知識，具體展現以簡馭繁的精神。
- (4) 應提供學生循序漸進的學習機會。建議先在坐標平面上練習點的平移，例如將三角形  $APQ$  平移至  $OP'Q'$ ，其中  $A$  點平移至原點，討論  $P'$  和  $Q'$  的坐標。鞏固了點的平移之後，再討論直線的平移。爾後，有圓的平移、二次函數的平移、三次函數的平移，皆屬同一脈絡的學習。
- (5) 直線的「陡」度、三角形面積公式、點到直線的距離公式，都是運用絕對值符號作為溝通工具的絕佳範例。10 年級範圍內的絕對值，應該以類似這種脈絡中的絕對值紀錄與操作為主，不要延伸到複雜的不等式與絕對值函數圖形。
- (6) 可藉此條目以集合的描述形式表示半平面區域，例如用  $R = \{(x, y) \mid y \leq 2x\}$  描述坐標平面上的區域  $R$ 。此集合形式的教學是以溝通為目的，不要擴張到集合運算。
- (7) 順時鐘和逆時鐘方向的直角旋轉（前項之第 (5) 點），是認識角有方向性之必要的初步經驗，應該要帶領學生認識。
- (8) 教學與評量過程中，應讓學生有機會察覺：妥善設計的坐標系統，或者妥善利用平移，能簡化問題並且凸顯問題的核心要素

### 條目範圍

1. 本條目意欲彰顯坐標的功能：它不只提供繪製方程式圖形的一張畫布而已，它有自己的功能。這些功能可以當作向量的前置經驗，但是本條目絕不包含向量觀念，也沒有任何向量操作。向量在數學史上發生得比較晚，顯示它雖然威力強大，卻很可能需要比較高的數學成熟度，本條目為學生準備這種成熟度，但過早引進向量方法很可能是揠苗助長。
2. 本說明雖指出三角形面積的坐標算法，以彰顯直角坐標的功能，並為師生提供好用的工具，但它不是必需的，本條目不含「行列式」，絕不系統性地表述行列式的代數性質。

### 釋例

1. 判斷直線  $y=2x$  分別對稱於 (1)  $x$  軸 (2)  $y$  軸 (3)  $x=y$  直線的圖形，並探討其斜率。
2. 討論如何將  $f(x)=x^2$  的函數圖形，經由對稱與平移，得到  $y=1-(x-3)^2$  的圖形。
3. 在說明三角比之補角、負角或餘角性質時，可運用或連結廣義角終邊的對稱性。

### 錯誤類型

若  $h > 0$ ，將點的  $x$  坐標置換成  $x-h$  時，點的位置向左平移。但是將方程式的  $x$  變數置換成  $x-h$  時，滿足方程式的圖形卻向右平移。這裡不能強記，強記則容易混亂，務必要求了解。而平移的想法與技術是最核心的數學方法之一，教師務必讓學生有充分學習的機會。

### 評量

1. 請勿過度練習二元一次聯立方程式的求解，不要設計太多等價於求解二元一次聯立方程式的評量題目。
2. 不要將使用向量方法的題目，移植到本條目的評量。

G-10-3 圓方程式：圓的標準式。	g-V-4
--------------------	-------



**先備：**熟練兩點之間的距離公式與配方法 (G-8-1、A-8-7)。

**連結：**能在圓上熟練操作極坐標與直角坐標間的轉換 (G-10-5)，能透過代數與幾何方法判定圓與直線的關係 (G-10-4)。

**後續：**橢圓的標準式與參數式，一般的二次曲線。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

本條目與 99 課綱沒有差異，主要希望學生能將圓的定義透過坐標及距離公式找出其代數型式，以連結國中的幾何定義，並作為距離公式的具體應用但是 99 課綱將此學習內容安排在 11 年級，而此時改在 10 年級，在技術上沒有向量可用，學生的成熟度也稍低，期望教師採用較為基礎的工具來發展本條目的內容。

#### 2. 相關約定

通常使用  $C$  或  $\Gamma$  表示一個圓，用  $C: x^2 + y^2 = 1$  表示圓  $C$  的方程式為  $x^2 + y^2 = 1$ 。

#### 3. 學習目標

- (1) 能將圓的幾何定義透過坐標及距離公式，表示成  $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ，並能理解滿足此方程式的點  $(x,y)$  也會在以  $(h,k)$  為圓心，半徑為  $r$  的圓上。
- (2) 能利用圓的標準式判定平面上一點與圓的相對位置關係：圓內、圓上、圓外。並以圓的不等式表示坐標平面上圓內、圓外（含或不含圓）的區域。
- (3) 能將圓的標準式轉換成二元二次方程式，並能從中找出圓心與半徑。
- (4) 能從所給定的二元二次方程式  $Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$  判斷所代表的圖形種類（圓、點、無圖形）。

#### 4. 教學斟酌

- (1) 可先由圓心在  $(0,0)$ ，半徑為  $1$  的情形開始引入標準式，透過  $x \mapsto x-h$ ， $y \mapsto y-k$ ，讓學生連結方程式平移的概念，最後將圓以原點為中心點進行縮放  $r$  倍，得到標準式： $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ 。
- (2) 此處應強調標準式可表示成二元二次方程式(一般式)，但任意的二元二次方程式(不討論有  $xy$  項的情況，而是  $x^2$  與  $y^2$  係數不同的情況) 卻不一定代表圓的圖形，可透過實際的例子操作讓學生理解其差異點。
- (3) 可連結國中階段的一些幾何性質，如任意三角形必有唯一的外接圓，透過圓的幾何性質或是距離公式進行求解。
- (4) 可藉此條目以集合的描述形式表示圓內或圓外的區域，例如用  $R = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$  描述坐標平面上的一個圓形區域  $R$ 。此集合形式的教學是以溝通為目的，不要擴張到集合運算。

### 條目範圍

本條目著重在圓的標準式型態的建立，並連結其代數型態，不宜出現給定條件利用坐標求其軌跡方程式的問題。

<b>G-10-4 直線與圓：</b> 圓的切線，圓與直線關係的代數與幾何判定。	g-V-4
--	-------

**先備：**圓的幾何性質 (S-9-7)，點、直線與圓的關係 (S-9-8)。

連結：直線方程式 (G-10-2)。

後續：二次曲線 (G-12 甲-1)。基本說明

### 1. 與 99 課綱的差異

99 課綱將圓方程式置於 11 年級，但是 107 課綱則在 10 年級，並且並無規定教學順序。因此，若本條目置於三角比之後，則近似於 99 課綱；但若本條目置於三角比之前，則僅可應用國中學習的銳角三角比，並應注意某些適合使用三角的課題，延到三角之後再一併處理。另外，若本條目置於不等式之前，則與二次(以上)不等式相關的問題，在此也不宜出現。

### 2. 相關約定

以集合方式： $R = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 9\} \cap \{(x, y) | x + y \geq 1\}$  表示弓形區域  $R$ 。

### 3. 學習目標

- (1) 透過圖形位置可觀察出，直線與圓的相交情形可分為：相交兩點、相切、不相交。
- (2) 了解兩方程式之聯立解，代表兩方程式圖形的交點。
- (3) 能已知圓與直線之方程式的條件下，可透過圓心到直線的距離，或兩方程式聯立的解，判定兩圖形的位置關係：直線為圓的割線(交兩點)、切線、或兩者不相交。
- (4) 能從所給定的二元二次方程式  $Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$  判斷所代表的圖形種類(圓、點、無圖形)。

### 4. 教學斟酌

- (1) 講解圓與直線位置關係的性質時，先以圓心在原點的實例討論，其他圓心不在原點的圖形，皆可透過平移後而得到圓心在原點的相對位置圖形，如此即可將複雜的代數運算簡化之！
- (2) 圓的參數式，依課程安排，講解極坐標概念後，在適當處融入。
- (3) 圓與直線的位置關係，分別以圓心到直線距離的幾何判定，以及代數上從解方程式根的個數，兩種方法判斷之。
- (4) 透過解聯立了解根的個數與圖形交點數的對應關係，例題的選取上，數字應盡量簡化，應避免複雜的數字運算；因此應讓學生了解到將點、圓、直線一起平移，並不會影響交點個數，因此例題的選擇可盡量以圓心在原點的圖形為例子說明。

### 條目範圍

1. 類似  $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 9\} \cap \{(x, y) | x + y \geq 1\}$  的集合表達，僅用於溝通，不涉及其解的範圍問題。
2. 不含兩圓關係，諸如兩圓相交、相切或相離所產生的相關應用問題，皆不講述。

### 釋例

1. 切線與圓的交點為重根的概念，除透過解聯立方程式得到外，也可透過直線的移動，讓學生感覺到兩交點越來越靠近，最後合而為一點。另外，再搭配解聯立的概念，讓學生感受到重根，數形合一。
2. 透過直線移動，讓學生觀察到直線與圓的各種相交情形。

### 錯誤類型

1. 過圓外上一點求圓的切線方程式，設直線斜率為  $m$  的情形下，當其中有一條為鉛直線時，所求的解會只剩另一條的斜率值，學生會誤以為只有一條切線。

2. 直線與圓相切時，圖形上只有一個交點，學生會誤以為解聯立只有一個根，應該要強調是兩相同實根。

### 評量

1. 有關  $y = \sqrt{5-x^2}$  與直線位置關係的相關應用問題，不宜在此作為評量考題，函數概念的問題宜在高三後再做處理。
2. 有關求切點的問題，此單元題目的選取，應注意數值的計算不可太繁複，主要是讓學生了解解聯立的根即為交點，不應讓學生操作繁雜的計算工作。
3. 若本條目在不等式之前，則解二次不等式的相關問題不宜出現，例：設  $k \in R$ ， $\Gamma: x^2+y^2+2kx+2(k+2)y+3k^2+k=0$  表一圓，求  $k$  範圍。

<b>G-10-5 廣義角和極坐標：</b> 廣義角的終邊，極坐標的定義，透過方格紙操作極坐標與直角坐標的轉換。	g-V-3
--	-------

**先備：**平面直角坐標系 (G-7-1)。

**連結：**廣義三角比 (G-10-6)。

**後續：**複數 (N-12 甲-3)，橢圓的參數式 (G-12 甲-1)。

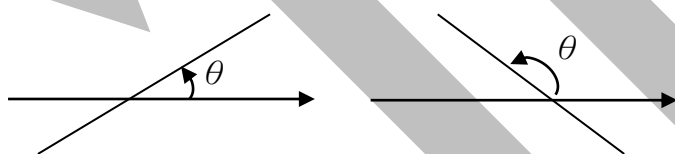
### 基本說明

#### 8. 與 99 課綱的差異

增加學生使用量角器、直尺、圓規動手操作的歷程，最後配合計算機的使用，從具體的測量來認識極坐標與直角坐標的關係。此外，99 課綱的安排，通常將極坐標作為廣義角三角比的應用。然而在 107 課綱，並未規範極坐標放在三角比之後，反而建議由極坐標和直角坐標的關係，來定義廣義角的三角比。

#### 9. 相關約定

- (7) 在平面上選定一個點  $O$  (稱為原點或極點)，以  $O$  為端點，向右作一條水平射線 (稱為極軸)，則平面上一點  $P$  的極坐標的表示法為  $P[r, \theta]$ ，其中  $r$  為  $\overline{OP}$  長， $\theta$  表示由極軸為始邊， $\overline{OP}$  為終邊逆時針旋轉的角度。
- (8) 直線  $L$  與  $x$  軸正向的夾角，稱為  $L$  的斜角。



#### 10. 學習目標

- (1) 認識廣義角。
- (2) 明白以  $x$  軸正向為坐標平面上角之始邊，是數學慣例；此慣例與其他學科的慣例不盡相同。
- (3) 明白以逆時鐘方向為廣義角之方向，是數學慣例；此慣例基本上獲得其他自然科學的採納。
- (4) 能使用直角坐標與極坐標兩種方式，正確描述任一廣義角的終邊上的某一定點。
- (5) 透過方格紙，能操作極坐標與直角坐標的轉換。

#### 11. 教學斟酌

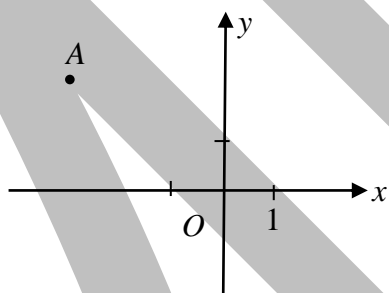
- (9) 在教材的處理上，建議可以有下列兩種方式：
- 讓學生在操作極坐標與直角坐標時，感受到：同一個廣義角，取到終邊上不同點，所得到的直角坐標之間有何關係，便可適時引入廣義角的三角比。
  - 在介紹完廣義三角比之後，作為應用的例子，介紹極坐標，再進行操作的活動，這時可以使用計算機幫助印證，並感覺到誤差的存在。
- (10) 本條目之廣義角以 $\pm 180^\circ$ 之範圍為原則，以精熟練習為目的時，可以擴及 $\pm 360^\circ$ 。請教師唯有在合理的情境之下，才討論超出 $\pm 360^\circ$ 範圍的角。廣義角作為溝通的語言，合理的使用範圍是 $-180^\circ$ 至 $360^\circ$ 之間；當角的終邊落在第一、第二象限時，除非特殊的情境需求，都應以正角表示，當終邊落在第三、第四象限時，依情境脈絡選擇以負角或正角表示。
- (11) 廣義角的學習，方向性比同界角重要。所以，雖然廣義角的範圍，初以 $-180^\circ$ 至 $360^\circ$ 為限，將來可在脈絡中推廣之，但是不宜在無情境的環境中過度練習同界角。
- (12) 理解斜角方向性的理由，應帶領學生認識，在平面上，斜率與斜角觀念彼此等價(若確定斜率，則確定斜角大小，反之亦然)。

### 條目範圍

僅介紹極坐標的表達、與直角坐標之間的轉換，不含極坐標方程式。

### 釋例

4. 如圖，利用直尺、圓規、量角器，並可運用畢氏定理與計算器，分別以直角坐標與極坐標表示A點的位置。



5. 給定  $P(-3,4)$ ，在方格紙上畫出點的位置，經過測量和計算而取得其極坐標的近似值。
6. 給定  $P[1, -20^\circ]$ ，在方格紙上畫出點的位置，經過測量和計算而取得其直角坐標的近似值。
7. 教師解釋為何數學以  $x$  軸正向為角之始邊的方法之一，是為了配合  $x$  軸為水平線 (horizontal line) 而  $y$  軸為鉛直線 (vertical line) 的慣例，以及水平為  $0$  度而鉛直為  $90$  度的語言上的習慣。
8. 教師解釋為何數學以逆時鐘方向為正向的方法之一，是延續前項，既然  $x$  軸正向已經是  $0$  度而  $y$  軸正向是  $90$  度，這就是逆時鐘的旋轉方向。另一個線索是三角形面積的坐標算法 (G-10-2)。
9. 某潛艇的雷達偵測到某一時刻有一不明物體出現在其東北方  $10$  公里處，若以該潛艇為原點， $1$  公里為單位，正東方與正北方分別為  $x$ 、 $y$  軸正向，則此不明物體的直角坐標為何？

<b>G-10-6 廣義角的三角比：</b> 定義廣義角的正弦、餘弦、正切，特殊角的值，使用計算機的 $\sin, \cos, \tan$ 鍵。	n-V-2 s-V-1 g-V-2
--	-------------------------

**先備：**直角三角形的三角比 (S-9-5)。

**連結：**圓的標準式，廣義角和極坐標，直線斜率與其斜角的正切 (G-10-5、G-10-7)。

**後續：**三角函數 (F-11A-1、F-11B-1)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

以前的高中數學課程都沒有正式使用計算機，新課綱要求學生以計算機的三角比（乃至於反三角比）按鍵，搭配在方格紙上實際作圖與測量的結果，具體地從操作中認識三角比。因為計算機的引入，不再查表，也不再以特殊角為主要操作對象。此課綱建議從通過原點的直線，經極坐標而至三角比的脈絡。過去的課程通常將極坐標視為三角比的應用，此課綱則意欲從極坐標定義廣義角的三角比。

#### 2. 相關約定

- (1) 本條目以「度」為角之測量單位，可以採用分、秒作為度的次級單位，60 秒為 1 分，60 分為 1 度。度、分、秒之符號依序為「°、′、″」，唯有最低等級的量才可以用小數，小數之意義為十進制。
- (2) 正弦、餘弦與正切之符號為  $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ ，排版時應使用正體字。令坐標平面原點以外的一點  $P$  之直角坐標與極坐標分別為  $(x, y)$  和  $[r, \theta]$ ，定義

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}$$

當  $x \neq 0$  時，定義  $\tan \theta = \frac{y}{x}$ ，亦即  $\tan \theta$  等於直線  $OP$  的斜率。

- (3) 補角 (supplementary angles) 和餘角 (complementary angles) 都沒有國際認可的慣用符號，原則上應以文字說明。臨時需要大量使用時，可以局部定義  $\theta^s$  為角  $\theta$  之補角： $\theta^s = 180^\circ - \theta$ ，而  $\theta^c$  為角  $\theta$  之餘角： $\theta^c = 90^\circ - \theta$ 。

#### 3. 學習目標

- (1) 明白廣義角的  $\sin$ 、 $\cos$  之定義，與直角三角形上銳角的  $\sin$  與  $\cos$  定義相容，所以廣義角三角比「推廣」了銳角三角比的範圍。
- (2) 能嫻熟地轉換直角三角形上的三角比概念與坐標平面上的三角比概念；後者之概念直接在坐標平面上理解  $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ ，而不必藉助於直角三角形。
- (3) 能熟練地使用特殊角的三角比，所謂特殊角是  $0^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$  以及它們在第二、三、四象限的對應角。能熟練地使用計算機求任意角的三角比（近似）值。

#### 4. 教學斟酌

- (1) 利用方格紙和計算機，以及早先學過的通過原點的直線，配合直角坐標（向兩軸做垂線）和極坐標的意義，先在第一象限連結國中所學的銳角三角比，然後推廣其形式到第三象限、第二和第四象限。
- (2) 到了高中階段，學習的重點是坐標幾何，不必過度練習平面幾何問題。

### 條目範圍

1. 本條目不涉及餘切  $\cot$ 、正割  $\sec$  和餘割  $\csc$ 。
2. 本條目不涉及三角比的「函數」意義。
3. 本說明雖然建議連結圓的參數式，但不宜在 10 年級引入動點觀念，延伸至軌跡相關的問題。

### 釋例

連結圓的標準式，透過正弦與餘弦的平方關係，讓學生發現點  $(\cos \theta, \sin \theta)$  都滿足圓方程式，故在圓上；進一步理解圓上任一點皆可表示為  $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ ，不但再度連結極坐標，並且可以藉此建立圓的參數式概念。

### 錯誤類型

忽略了廣義角的方向性，誤以為鈍角  $\theta$  的三角比等於其補角的三角比；因為鈍角的終邊在第二象限，而將「角」視為從  $180^\circ$  量起的銳角。

### 評量

盡量引導學生連結「通過原點的直線」與三角比。

<b>G-10-7 三角比的性質：</b> 正弦定理，餘弦定理，正射影。連結斜率與直線斜角的正切，用計算機的 $\text{asin}$ , $\text{acos}$ , $\text{atan}$ 鍵計算斜角或兩相交直線的夾角(三角測量 #)。	n-V-2 s-V-1 g-V-3
--	-------------------------

**先備：**直角三角形的三角比： $\tan A$ 、 $\sin A$ 、 $\cos A$  (S-9-5)

**連結：**直線方程式、斜率、點與直線之平移 (G-10-2)；廣義角的三角比、使用計算機的  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$  鍵 (G-10-6)。

**後續：**正射影與內積、面積與行列式、兩向量的夾角 (G-11A-6、G-11B-2)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

本條目在 99 課綱是 11 年級的內容，此處配合 G-10-2 及 G-10-6 一併於 10 年級進行學習。主要希望能將斜角的想法與直線的斜率做結合，連結學生在直線方程式的學習經驗，並加以應用。此外，99 課綱將三角測量設為獨立單元，本條目將三角測量融入正弦與餘弦定理在長方體上的應用，不設獨立單元。

#### 2. 學習目標

- (1) 能理解正弦定理併用來解決三角形的邊角關係問題。
- (2) 能理解餘弦定理併用來解決三角形的邊角關係問題。
- (3) 能透過三角比理解投影定理。
- (4) 能理解直線斜率等於直線斜角的正切值，並能運用計算機求得直線之斜角的近似值。
- (5) 能利用計算器搭配正弦與餘弦定理或直線方程式求出兩直線的夾角。

#### 3. 教學斟酌

- (1) 本條目不含和角與差角公式，因此在坐標平面上處理直線夾角時，可利用直線斜率等於直線斜角的正切值，透過計算機求出兩直線斜角的近似值，再由其差得到夾角，讓學生能實際利用計算機處理非特殊角的相關問題。
- (2) 正弦與餘弦定理並不需要坐標，建議以基本的幾何方法導出。但是，可以搭配坐標而應用之。
- (3) 在沒有坐標的條件下，運用正弦與餘弦定理求得兩直線夾角之正弦或餘弦，再透過計

算機求夾角的近似值。

- (4) 三角測量部分希望能透過將問題佈置在長方體的方式進行學習，不但可以銜接學生在國中已經學習過的立體圖形概念，往後又可以為將來學習空間概念時，建立空間坐標系做為前置經驗的建立。
- (5) 為因應電腦 3D 技術所衍生的空間概念學習需求，在長方體、柱體、錐體上進行測量練習時，可同時帶領學生認識截面。

### 條目範圍

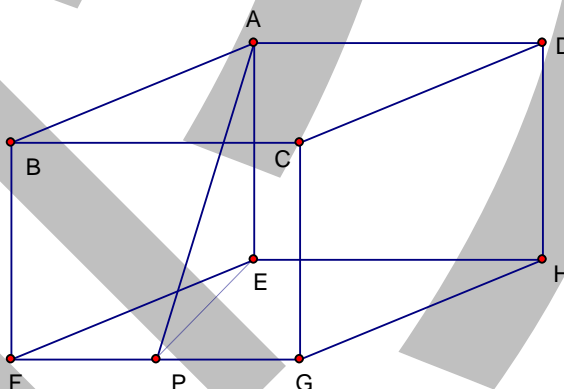
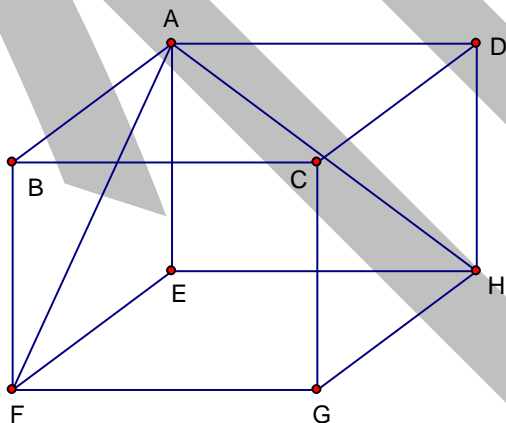
不透過向量方式或是差角公式來求兩直線夾角。

### 釋例

1. 已知  $L_1: y = x$ ， $L_2: y = 2x$ ，試求  $L_1, L_2$  的夾角。  
此時，由  $L_1$  的斜率為 1，可知  $L_1$  與  $x$  軸正向夾  $45^\circ$ ， $L_2$  的斜率為 2，可知  $L_2$  與  $x$  軸正向夾  $63.4^\circ$  (利用計算機)，所以  $L_1, L_2$  的夾角為  $18.4^\circ$ 。
2. 已知  $\triangle ABC$  三邊長為 5、6、7，則最大角約幾度？  
利用餘弦定理可知，若最大角為  $\theta$ ，則

$$\cos \theta = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 6} = \frac{1}{5}, \text{ 也就是 } \theta = \cos^{-1} \left( \frac{1}{5} \right) = 78.46^\circ。$$

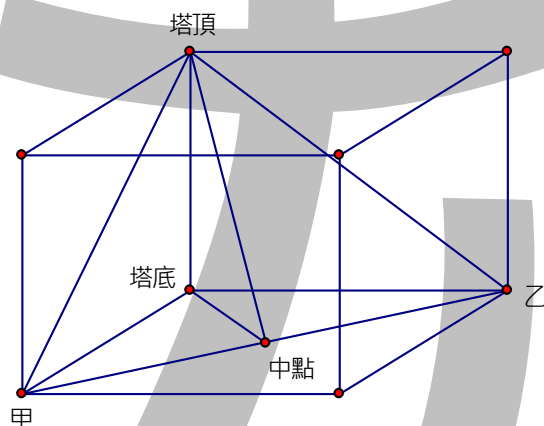
3. 本條目不強調配置情境的三角測量，希望回歸基本，以長方體上的測量為主要學習目標。例如長方體  $ABCD - EFGH$ ， $AB = 3$ ， $AD = 4$ ， $AE = 3$ ，如下圖左，求  $\angle FAH$  至整數度。(  $\angle FAH = \cos^{-1} \sqrt{0.18} \approx 65^\circ$  ) 此類型的題目順便讓學生認識「截面」，也有機會認識四面體 ( $AEFH$ )，教師還可以引導學生避免一個迷思概念： $\angle FAH$  不是直角， $\triangle AFH$  不是直角三角形！



4. 本條目銜接並熟悉國中階段（九年級）的一個基本概念：長方體的任一稜邊垂直於「兩側」的面，並且垂直於那兩面上任意通過該邊頂點的直線。這是「法線性質」的前置經驗，可以利用本條目在長方體上的測量問題來複習，並鞏固其概念。例如在上圖右的長方體  $ABCD - EFGH$  上， $BC$  邊垂直於長方形  $DCGH$  上任意通過  $C$  點的直線(或線段)。若給定  $AB = 3$ ， $AD = 4$ ， $AE = 3$ ，且  $P$  是  $FG$  的中點，可以求平面  $FGHE$  上之點  $P$  對  $A$  點的仰角，亦即求

$$\angle APE \left( = \tan^{-1} \sqrt{\frac{9}{13}} \approx 40^\circ \right)。$$

5. 參照下圖，甲、乙兩人觀察同一座塔，甲在塔的正南方 10 公里處，觀察塔頂的仰角為 60 度，乙在塔的正東方，觀察塔頂的仰角為 30 度，
- (1) 甲、乙兩地相距多少公里？(商高定理)
  - (2) 甲、乙兩地的中點觀察塔頂的仰角為多少度？(利用計算器求角度)
  - (3) 丙在甲、乙兩地連線上，且觀察塔頂仰角為 45 度，則乙、丙的距離為多少？(搭配餘弦定理)



## 評量

釋例中「長方體上的法線性質」僅為九年級概念的複習與應用，並期望銜接至十一年級的空間概念。不要延伸至一般的法線性質，那是十一年級的學習內容。在本條目中利用上述概念時，必須限定在長方體上，且明顯有一稜邊垂直於一個面的情況。

**A-10-1 式的運算：**三次乘法公式，根式與分式的運算。

a-V-1

**先備：**二次式的乘法公式 (A-8-1)、一元二次方程式的解法與應用 (A-8-6)。

**連結：**三次函數的圖形特徵 (F-10-2)、有系統的計數 (D-10-3)，數列級數與遞迴關係 (N-10-6)。

**後續：**函數的極限 (F-12 甲/乙-1)、微分 (F-12 甲(乙)-3)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

107 課綱有特別提到分式運算。

#### 2. 相關約定

(1)  $x^3 + y^3$  的分解稱為和立方公式， $x^3 - y^3$  的分解稱為差立方公式。 $(x \pm y)^3$  的展開稱為和或差的立方公式，或者立方和、立方差公式。

(2) 所謂最簡根式是指平方根內僅為不含重複質因數的正整數，且係數均為有理數的根式。

(3) 所謂雙重根號是  $\sqrt{p+q\sqrt{r}}$  的形式。

#### 3. 學習目標

(1) 能展開和或差的立方： $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$ 。



(2) 能了解立方和與立方差公式的由來。

(3) 能將分母含有平方根式 ( $\sqrt{a}$  或  $a \pm \sqrt{b}$  或  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ ) 的分式，化簡到最簡根式，以及根式(例如： $\sqrt{x^2+2+\frac{1}{x^2}} = |x+\frac{1}{x}|$ ) 運算。

(4) 能化簡形如  $\sqrt{(a+b) \pm 2\sqrt{ab}}$  的雙重根號為  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$  (其中  $a > b$ )。

(5) 能以符號操作基本的分式運算，含基本的繁分式化簡

例如：
$$\frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})} = \frac{2ab}{a+b}, \quad \frac{x^3-1}{x-1} = x^2+x+1。$$

#### 4. 教學斟酌

(1) 可透過立方展開讓學生了解立方和公式的由來，或可搭配體積概念說明。亦即

$$(x+y)^3 = (x+y)^2(x+y) = (x^2+2xy+y^2)(x+y) = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3。$$

接著透過移項得

$$x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = (x+y)(x^2-xy+y^2)。$$

並說明這兩個公式的相關性。

(2) 將差的立方轉化成和的立方  $(x-y)^3 = [x+(-y)]^3$ ，讓學生了解公式

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

中那些地方會出現負號。

(3) 以  $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 = (a+b) \pm 2\sqrt{ab}$  說明化簡雙重根號的觀念，勿直接以公式的形式讓學生記憶。

(4) 雙重根號的化簡，請以  $\sqrt{p \pm 2\sqrt{q}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$  的形式為主，其中  $p = a+b, q = ab$ ，又  $a > b$ 。

(5) 符號的分式運算與繁分式化簡，都應以國中階段在解方程式的過程中以具體的數值所做的計算為基礎，做形如  $\frac{x^3-1}{x-1}$  或  $\frac{x+1}{\frac{1}{x-1}}$  或  $\frac{1}{2x} \div \frac{1}{x}$  的運算或化簡，在未來的學習歷程中適時練習其操作，不要在此條目的教學中做複雜的練習。

#### 條目範圍

本條目，以及全部的高中數學必修課程，都限定在實數範圍內。

#### 釋例

1. 觀察出  $\alpha^3 + \beta^3$  或  $\alpha^3 - \beta^3$  皆可表為  $\alpha + \beta$  及  $\alpha\beta$  的關係式。

2. 立方差公式也可以連結多項式的除法原理。例如： $x^3 - a^3 = 0$  有一根  $a$ ，所以  $x^3 - a^3$  有因式  $x - a$ ，做多項式除法（長除法即可）得到立方差公式。而立方和公式則僅為符號代換 ( $a \rightarrow -a$ )。

#### 錯誤類型

1.  $\sqrt{(a+b) - 2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = |\sqrt{a} - \sqrt{b}|$ ，學生會忘了判別  $a, b$  的大小，而直接寫成  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

2. 差的立方  $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ ，以及立方差  $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$ ，這兩個公式中的負號出現的位置，學生易搞錯。

3. 根式的運算，學生會忘記判斷根式運算出來為正，例：錯誤寫法  $\sqrt{x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}} = x - \frac{1}{x}$ 。

### 評量

根式的化簡，應配合題目實際上的需要，勿過度要求代數計算的技巧。例如不宜處理將

$\sqrt{9 - 2\sqrt{23 - 6\sqrt{10 + 4\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}}}$  化為  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$  這類繁複的根式運算。

**A-10-2 多項式之除法原理：**因式與餘式定理，多項式除以 $(x-a)$ 之運算，並將其表為 $(x-a)$ 之形式的多項式。

a-V-2

**先備：**多項式的意義 (A-8-2)、多項式的四則運算 (A-8-3)。

**連結：**式的運算 (A-10-1)。

**後續：**複數與方程式 (N-12 甲-3)、方程式的虛根 (A-12 乙-2)。

### 基本說明

1. 與 99 課綱的差異

- (1) 刪除整係數一次因式檢驗法、找方程式的有理根。
- (2) 將多項式表為 $(x-a)$ 之形式，其實是泰勒展開式，除了 99 課綱中用來求函數近似值如  $f(0.99)$ ，也可以為多項式函數圖形在局部近似直線的性質做準備。

2. 相關約定

無特殊約定。

3. 學習目標

- (1) 認識多項式的除法原理。
- (2) 利用除法原理，理解因式定理與餘式定理。
- (3) 使用綜合除法處理多項式除以 $(x-a)$ 之運算。
- (4) 能將多項式表示為 $(x-a)$ 之形式的多項式。

4. 教學斟酌

- (1) 除法原理應配合國中學過的長除法來說明，並特別解釋餘式的次數與被除式次數的關係。
- (2) 教師可視情形補充分離係數的多項式除法。
- (3) 本條目的主要目的是為準備多項式函數的學習，請勿擴及過多的方程式論與多項式的代數性質。

### 條目範圍

1. 不將綜合除法的演算程序推廣至  $ax - b$  形式之除式 ( $a \neq 1$ )。
2. 不含關於多項式的根與係數關係，不含勘根定理。

### 釋例

1. 設  $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 19 = a(x-2)^4 + b(x-2)^3 + c(x-2)^2 + d(x-2) + e$ ，則以  $(x-2)^2$  除  $f(x)$  所得的餘式為何？
2. 多項式  $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$  除以  $x^2 - 5x - 6$  之餘式可能為下列哪些選項？  
(1)  $x^2 - 3x + 1$  (2)  $3x - 1$  (3)  $-2x$  (4)  $0$  (5)  $5$
3. 可以用立方差公式當作動機，推廣到  $x^n - y^n$  的分解公式。亦即因為  $x^n - a^n = 0$  有一根  $a$ ，所以  $x^n - a^n$  有因式  $x - a$ ，做多項式除法（綜合除法）得到一般的次方差公式。而一般的次方和公式則僅為符號代換。

### 評量

1. 不評量複雜的餘式定理應用，如：已知多項式  $f(x)$  次數高於三次，且  $f(x)$  被  $(x-1)^2 \cdot (x-2)^2$  除，餘式分別為  $5x-3$ 、 $2x+7$ ，則  $f(x)$  被  $(x-1)^2(x-2)$  除所得之餘式為何？
2. 超過三次以上的多項式因式分解，因整係數一次因式檢驗法已刪除，不適宜做為評量。

<b>F-10-1 一次與二次函數：</b> 從方程式到 $f(x)$ 的形式轉換，一次函數圖形與 $y = mx$ 圖形的關係，數線上的分點公式與一次函數求值。用配方將二次函數化為標準式，二次函數圖形與 $y = ax^2$ 圖形的關係，情境中的應用問題。	f-V-1 a-V-1 g-V-5
---	-------------------------

**先備：**藉由方程式的形式而獲得的初等函數觀念 (F-8,9-1,2)。

**連結：**直線方程式、圓方程式 (G-10-2、G-10-3)。

**後續：**函數、導函數 (F-12 甲、乙-1,4)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

在內容上，本條目與 99 課綱的一次與二次函數主題並無太大差異，但 107 課綱更強調國中經驗的連結，特別要求在課程脈絡中，認識  $f(x)$  之函數符號的必要性與合理性，並且在技術上補綴二次函數的配方程式。

#### 2. 相關約定

- (1) 當  $f(x)$  是一個函數， $f$  就是函數的名稱，不須每逢函數就必命名其應變數。例如，可以說「 $x$  是  $f$  的自變數」，「 $f$  是線型函數」，「 $f$  是單項函數」，「 $f$  是多項式函數」，「 $f$  的圖形」等詞。
- (2) 令  $a$ 、 $b$  為實數， $n$  為非負整數，稱  $f(x) = ax^n$  為單項函數，稱  $f(x) = ax + b$  為線型函數，稱  $f(x) = a$  為常數函數。若限定  $a \neq 0$ ，則前述三種函數又分別稱為  $n$  次函數或一次函數或零次函數。當  $f(x)$  的「數學表達」是一個以  $x$  為元的  $n$  次多項式，稱  $f$  為多項式函數或  $n$  次多項式函數或  $n$  次函數。
- (3) 當  $f(x) = 0$  稱  $f$  為零函數。零函數可以被考慮為特殊的多項式函數，但是它未必是多項式函數。不要將零函數歸類為多項式函數，所以零函數也就沒有「次數」的問題。
- (4) 在  $xy$  坐標平面上，滿足  $y = f(x)$  之所有點聚集而成的圖形，稱為  $f$  的函數圖形或  $f$  的圖形。

#### 3. 學習目標

- (1) 能以函數名稱 (例如  $f$  和  $g$ ) 而非應變數 (例如  $y$  和  $z$ ) 名稱來溝通關於函數的敘述。藉由已經具備基礎的直線方程式與  $y = ax^2$  和  $y = a(x-h)^2 + k$ ，學習函數符號  $f(x)$  的溝通與操作。
- (2) 理解有些方程式，例如直線方程式  $ax + by + c = 0$ ，可以將一個變數「孤立」在等號的左邊 (例如  $y = mx + k$ )，當右邊的變數 (例如  $x$ ) 代入一個數就算出一個對應數時，那兩個變數之間就有函數關係；此時等號右邊的數學式可以用函數符號來表達 (例如以  $f(x)$  代表等號右邊的數學式， $f(x) = mx + k$ )。但是有些方程式，例如圓方程式  $x^2 + y^2 = 1$ ，將任一變數「孤立」在等號左邊之後 (例如  $y^2 = 1 - x^2$ )，在右邊代入一個  $x$  並不能確定一個對應的數  $y$ ，則兩變數之間沒有函數關係。
- (3) 知道函數圖形的定義，連結  $f(x)$  的函數圖形就是  $y = f(x)$  的方程式圖形，並能描繪一次與二次函數的圖形。
- (4) 能將給定的二次函數之「數學表達」(一個二次多項式) 在一般式  $ax^2 + bx + c$  與標準式  $a(x-h)^2 + k$  之間轉換。
- (5) 知道數線上的分點公式，理解其原因，並能應用於一次函數求值：令  $f(x)$  為一次函數，

已知三數  $a$ 、 $b$ 、 $c$  之比例關係，且已知  $f(a)$  與  $f(b)$  時，利用分點公式求  $f(c)$  之值。

- (6) 認知函數符號  $f(x)$  與方程式符號的差異之一，是前者較容易表達變換。能執行  $f(x)$  改為  $f(t)$ 、 $f(2x)$ 、 $f(x-1)$  之類的操作，並連結方程式圖形平移的舊經驗，理解  $f(x-h)$  之圖形乃是  $f(x)$  之圖形的水平平移，而  $f(x)-k$  是鉛直平移。
- (7) 認知所有一次函數的圖形，都是其一次單項函數圖形（也就是同斜率通過原點的直線）的水平「或」鉛直平移。而所有二次函數的圖形，都是其二次單項函數圖形的水平「和」鉛直平移。換句話說，所有一次、二次函數圖形，都與其最高次項函數之圖形「全等」。
- (8) 認識並理解二次函數  $f(ax)$  之圖形與  $f(x)$  圖形的關聯。理解二次函數有最大或最小值，並能用以解決問題。

#### 4. 教學斟酌

- (1) 描述函數的時候，應該在情境脈絡中，以語言的直覺意義描述函數的遞增（漸增，圖形上升）或遞減（漸減，圖形下降），一個數被函數對應或不被對應，但不要正式定義遞增、遞減、值域等觀念。注意上述增或減的說法，約定在朝著  $x$  軸正向而言；如果不約定方向，則增減的觀念是混淆的。
- (2) 在合理的情境中，可以討論限定在閉區間內的二次函數極值問題，而且該極值可能發生在區間的端點。

#### 條目範圍

本條目不含函數的正式定義及值域、對應域、定義域等概念。

#### 釋例

1. 國中階段只學習了一元二次方程式的配方程序，亦即先將常數全部移到等號右側，以等量公理進行配方程序，然後求未知數的解。本條目需以類似程序直接對二次多項式配方。初步的程序可以連結國中經驗，將函數先改寫成方程式再處理配方。例如欲將  $f(x) = 2x^2 + x + 3$  改寫成完全平方的形式，先改寫成方程式符號  $2x^2 + x + 3 = y$ ，將常數項全部移去右側並將  $x^2$  係數化為 1，得到

$$x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}。$$

以等量公理配方

$$x^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}x + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} + \frac{1}{16}，$$

整理為  $(x + \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{2}y - \frac{23}{16}$ ，再將  $y$ 「孤立」為  $2(x + \frac{1}{4})^2 + \frac{23}{8} = y$ ，所以  $f(x) = 2(x + \frac{1}{4})^2 + \frac{23}{8}$ 。

這裡其實是一個練習轉換方程式符號與函數符號的好機會。然而，學生應該最終能夠不經過方程式符號而直接對二次多項式執行配方程序。

2. 二次函數  $f(ax)$  當  $|a|$  越小圖形的「開口」越大，有另一個將來有用的描述，是說圖形越「扁平」。熟悉這個觀念的方式之一，是想像  $|a|$  小到極致就是 0，而此時的函數圖形是水平線（ $y = 0 \cdot x^2$  的平移），非常地「扁平」。

#### 錯誤類型

1. 誤以為當  $a > 1$  使得  $f(ax)$  的圖形「變大」。
2. 誤以為「若干點」可以「連成」函數圖形。例如學生認為五點可以畫出二次函數圖形。雖然三點確實可以決定一個不超過二次的多項式函數，但是學生對函數圖形的認知是有待商榷的。
3. 當  $k > 0$ ，將方程式的變數  $y$  置換成  $y - k$  之後，方程式圖形向上移動  $k$  單位。但是，函數  $f(x) - k$  的圖形卻向下移動  $k$  單位。這兩個觀念的連結，在於  $y = f(x)$  是個方程式，而

$y-k=f(x)$ 的圖形向上移動，故  $y=f(x)+k$ 的圖形向上移動，也就是  $f(x)+k$  的函數圖形向上移動。所以，函數圖形與方程式圖形的平移規則，其實是一樣的。

## 評量

不宜出現與絕對值合成的函數，例如  $f(x)=|x^2-3x|+4x-6$ 。

<b>F-10-2 三次函數的圖形特徵：</b> 二次、三次函數圖形的對稱性，兩者圖形的大域（global）特徵由最高次項決定，而局部（local）則近似一條直線。	f-V-2 a-V-1 g-V-5
--	-------------------------

**先備：**了解二次函數圖形具有對稱軸的特徵，並能應用於繪製圖形 (F-9-2)。

**連結：**能將二次函數透過配方法表示成標準式 (F-10-1)，能將三次函數表為  $(x-a)$  之形式的多項式 (A-10-2)，能連結大域特徵與多項式函數圖形 (F-10-3)。

**後續：**多項式函數的導函數 (F-12 甲-3、F-12 乙-3)，連結函數的奇偶性與圖形的對稱關係 (F-12 甲-1、F-12 乙-1)。

## 基本說明

### 1. 與 99 課綱的差異

本條目主要希望學生能透過描點與圖形繪製觀察出二次及三次函數圖形的對稱特性，在此並不會介紹奇函數與偶函數的定義，也沒有介紹四次或更高次函數，與 99 課綱有所不同。另外配合條目 A-10-2，可將三次函數表為  $(x-a)$  之形式，藉以讓學生能從此形式了解三次函數在局部區域的圖形會近似於一條直線，此部分內容則是 99 課綱所沒有呈現的。

### 2. 學習目標

- (1) 透過在方格紙上描點，與電腦軟體的輔助，能觀察並歸納出二次函數的線對稱特徵及三次函數的點對稱特徵。
- (2) 能理解將  $x \mapsto x-h$ ， $y \mapsto y-k$  代表函數圖形有水平及鉛直的平移現象。
- (3) 能理解三次函數圖形可經平移對稱於原點。
- (4) 能透過將函數表為  $(x-a)$  之形式理解圖形在局部會近似於一直線的特性。
- (5) 能理解大域的特徵是由最高次項所決定。

### 3. 教學斟酌

- (1) 讓學生透過描點繪製函數圖形的過程，觀察歸納出二次函數單項式  $y=ax^2$  具有  $x \mapsto -x$ ，不影響函數值的特性，發現其對稱  $y$  軸的特性，並藉由將二次函數  $y=ax^2+bx+c$  表為  $y=a(x-h)^2+k$  的過程，讓學生理解  $y=a(x-h)^2+k$  為  $y=ax^2$  平移後得到。
- (2) 讓學生透過描點繪製函數圖形的過程，觀察歸納出三次函數  $f(x)=ax^3$  具有  $x \rightarrow -x$  時， $y \rightarrow -y$  的特徵，觀察出三次函數  $f(x)=ax^3$  具有對稱原點的結果。
- (3) 透過實例，讓學生了解任意三次多項式  $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$  皆可選取適當的  $h$  值，透過配三次方的過程，變成  $f(x)=(x-h)^3+(p-h)$ ，此圖形可由  $g(x)=ax^3+px$  平移得到，因此了解到任意三次多項式的圖形都會有對稱中心。此處可讓學生比較二次函數與三次函數的不同點，二次函數可透過配方法平移回通過原點的單項式，代表二次函數具有極大值或極小值，而三次函數則可平移回通過對稱中心的圖形。

- (4) 透過將二次函數  $y = ax^2 + bx + c$  表為  $y = a(x-h)^2 + b(x-h) + k$  的過程，讓學生理解在  $x = h$  附近（局部），圖形會有近似於一直線的特徵，此處可順便說明直線斜率恰為  $(x-h)$  項的係數。
- (5) 透過實例讓學生理解當  $|x|$  很大時， $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \approx ax^3$ ，藉以說明三次函數的大域性質由最高次項決定。
- (6) 老師在教學上，可利用電腦軟體輔助繪圖，讓學生能透過圖形觀察理解對稱的特徵。

### 條目範圍

1. 本條目著重描點觀察函數圖形的對稱特徵，並未涉及奇函數與偶函數之定義： $f(-x) = -f(x)$ ， $f(-x) = f(x)$ ，僅討論圖形的對稱特性（連結 G-10-1）。
2. 本條目是藉由泰勒形式的表現方式讓學生能體會在  $x = h$  附近（局部），圖形會有近似於一直線的特徵，以作為後續學習微分及切線概念的基礎，但此處不宜出現與微分相關的數學問題。

### 釋例

1. 已知下列各函數，觀察它們的圖形，並回答下列問題。  
 $y = x^3$ 、 $y = x^3 + 3x^2$ 、 $y = x^3 + x$ 、 $y = x^3 + x + 1$ 。  
 $y = -x^3$ 、 $y = -x^3 + 6x^2$ 、 $y = -x^3 + 6x$ 、 $y = -x^3 + x - 3$ 。  
 $y = 2x^3$ 、 $y = x^3 + 3x^2 + 1$ 、 $y = -x^3 + 6x + 2$ 、 $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ 。  
 (1) 哪些圖形本身對稱於原點？為什麼？它們的各項次數有何特徵？  
 (2) 已知  $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x-1)^3 + (x-1)$ ，則這個函數圖形可以從上述哪一個函數圖形平移得到？  
 (3) 已知  $h(x) = y = -x^3 + 6x^2 = -(x-2)^3 + 12(x-2) + 16$ ，若把  $h(x)$  下移 16 單位，再向左平移 2 單位，新圖形會對稱於原點嗎？  
 (4) 若  $y = x^3 + 3x^2 + 1 = (x-a)^3 + k(x-a) + l$ ，請找出  $a = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $k = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $l = \underline{\hspace{1cm}}$ 。並說明如何平移此圖形，使其對稱於原點。  
 (5) 你認為任意三次多項式的圖形都可以經由平移，使其圖形對稱於原點嗎？為什麼？
2. 已知  $f(x) = (x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 3(x-2) + 1$ ，透過 EXCEL 的計算，讓學生能透過觀察體會  $x = 2$  附近，圖形會有近似於一直線的特徵。

$x = 2$ 附近	原函數	直線	誤差
$x - 2$	$f(x) = (x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 3(x-2) + 1$	$g(x) = 3(x-2) + 1$	$ f(x) - g(x) $
-0.005	0.985149875	0.985	0.000149875
-0.004	0.988095936	0.988	0.000095936
-0.003	0.991053973	0.991	0.000053973
-0.002	0.994023992	0.994	0.000023992
-0.001	0.997005999	0.997	0.000005999
0.000	1	1	0.000000000
0.001	1.003006001	1.003	0.000006001
0.002	1.006024008	1.006	0.000024008
0.003	1.009054027	1.009	0.000054027
0.004	1.012096064	1.012	0.000096064

0.005	1.015150125	1.015	0.000150125
-------	-------------	-------	-------------

<b>F-10-3 多項式不等式：</b> 解一次、二次、或已分解之多項式不等式的解區間，連結多項式函數的圖形。	f-V-2 a-V-4
--	----------------

**先備：**一元一次不等式的意義(A-7-7)、一元一次不等式的解與應用(A-7-8)。

**連結：**區間符號 (N-10-2)、一次與二次函數 (F-10-1)、三次函數的圖形特徵 (F-10-2)。

**後續：**微分 (F-12 甲-3)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

已刪除牛頓整係數一次因式檢驗法，因此三次以上的多項不等式，需是已分解的多項式才能求其不等式的解。

#### 2. 相關約定

以  $[a,b]$ 、 $(a,b)$ 、 $[a,b)$ 、 $(a,b]$ 、 $(-\infty,b]$ 、 $(-\infty,b)$ 、 $[a,\infty)$ 、 $(a,\infty)$  等區間符號以及聯集符號  $\cup$  表示解區間；不一定在本條目全部用到。

#### 3. 學習目標

(1) 透過圖形繪製，說明圖形與  $x$  軸的交點，即為方程式的根，並能進一步了解一次與二次不等式解的關鍵，在於求得與  $x$  軸的交點後，即能求出一次、二次不等式的解區間。

(2) 透過圖形觀察  $f(x) \geq 0$ 、 $f(x) \leq 0$ 、 $f(x) > 0$ 、 $f(x) < 0$ ，其對應的解區間。

(3) 能已分解的多項式，若為偶數重根，則重根處圖形兩側的值同號；若為奇數重根處，則圖形左右兩側的值異號，即圖形穿越  $x$  軸。

(4) 了解已分解的三次以上不等式圖形與  $x$  軸的交點處特徵，並能判別圖形在哪些區間位於  $x$  軸上方，哪些區間位於  $x$  軸下方後，即能求得三次以上的已分解不等式的解區間。

#### 4. 教學斟酌

(1) 二次函數的圖形若與  $x$  軸不相交，由圖形觀察出其為恆正或恆負特徵，並透過配方法，驗證恆正或恆負的性質。在此，因為尚未有虛根概念，所以僅說明其無實根。

(2) 教師可搭配電腦軟體，繪製各種不同的函數圖形，幫助學生觀察不等式解的情形，體會圖形變化的規律與代數解的關係。

### 條目範圍

1. 三次以上未分解的多項式不等式，若告知其因式或一個根，可透過因式定理分解此多項式，即可畫出多項式的簡圖，並求得不等式的解。

2. 三次以上的多項式不等式，若未分解並且未告知其因式，在此不宜出現。

3. 不含分式不等式。

### 釋例

1. 奇數重根與偶數重根在圖形上的差異，宜透過左右兩側的點帶入，觀察其圖形的正、負號，以了解其圖形特徵上的不同。

2. 可與因式定理結合，求出不等式的解。

例：已知  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$  有  $x - 1$  的因式，求  $f(x) \geq 0$  的解。

### 錯誤類型

1. 學生對於不等式  $(x+1)(2-x) > 0$  應先化為係數為正的  $(x-1)(x-2) < 0$  過程不能理解，教師應在這裡提出清楚的說明。

2. 學生過去的經驗，似乎顯示不同的不等式應該有不同的解。但是在此卻可能發現，不同的多項式不等式卻有相同的解，例如  $(x+2)(x^2+x+1) > 0$  與  $(x+2)(x^2+2x+5) > 0$  是不同的不等式，其解卻相同。教師不必刻意教導這個現象，但如果學生產生了疑問，可以先說

不同的方程式本來就可能有同樣的根，例如  $2x=0$  和  $x^3+x=0$  的（實）根是一樣的；而前面那兩個三次不等式的情況，可以從那兩個三次函數的圖形來理解，建議教師使用繪圖軟體來輔助講解。

## 評量

1. 絕對值分式不等式不宜出現，例：解不等式  $\left| \frac{x+1}{x-1} \right| \leq 2$ ，得  $x$  的範圍為\_\_\_\_\_。
2. 下列試題在此不宜出現。例：設  $f(x)=x^5+x^4-10x^3-10x^2+x+5-a$ ，其中  $a \in \mathbb{Q}$ ，若  $f(x)=0$  之一根為  $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ，求  $f(x) \geq 0$  的解。
3. 不要考哪些多項式不等式有相同的解。

<b>D-10-1 集合</b> ：集合的表示法，字集、空集、子集、交集、聯集、餘集，屬於和包含關係，文氏圖。★#	d-V-1
---	-------

**先備**：一元一次不等式的解與應用（A-7-8），四邊形的基本性質（S-8-9、S-8-10、S-8-11）。

**連結**：實數，絕對值不等式（N-10-2），多項式不等式（F-10-3），複合事件的古典機率（D-10-4）。

**後續**：函數的定義域與值域，複數（選修數學甲、乙）。

## 基本說明

### 1. 與 99 課綱的差異

就學習目標而言，沒有差異。但是，在教材安排上，107 課綱不鼓勵按照數學知識內容劃分學習內容，關於集合的概念和溝通方式，分散在 10 年級的課程中，在適當的情境與脈絡中，搭配其他學習內容而一併學習。

### 2. 相關約定

- (1) 大多數關於集合的符號，已有明確的慣例，故從略。惟描述式的集合定義，在一對大刮號之內，建議以  $|$  作為分界符號。例如  $\{n \in \mathbb{Q} \mid n \div 2 \text{ 餘 } 0\}$ 。差集（集合的減運算）符號為反斜線  $\setminus$ ，集合  $A$  的餘集記作  $A'$  或  $A^c$ 。
- (2) 非負整數（全數）並無慣例符號，建議寫成  $\mathbb{Q} \cup \{0\}$ 。（應避免  $\mathbb{Q}_0$  符號，它看起來像是  $\mathbb{Q}$  的某個子集，而且它容易與 Aleph Null 符號  $\aleph_0$  混淆）。

### 3. 學習目標

- (1) 知道集合的定義，能使用表列法與描述法表達集合。
- (2) 理解並能用文氏圖表達字集、空集、子集、交集、聯集、餘集的意義。
- (3) 以實際的例子與文氏圖解釋笛摩根定律。
- (4) 以區間連結多項式不等式的解。
- (5) 認識「集合中的元素」，理解屬於和包含關係，前者為元素與集合，後者為集合與集合的關係。

### 4. 教學斟酌

- (1) 適度銜接國中經驗，例如以各種四邊形作為集合運算的範例。
- (2) 可視學生程度介紹「解集合」的意義。
- (3) 非負整數  $\mathbb{Q} \cup \{0\}$  是認識聯集與「或」之連結的好例子。

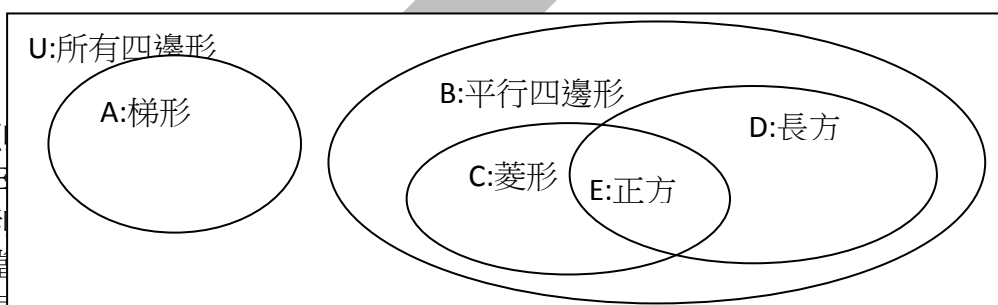
## 條目範圍

不必設置獨立的教學單元，應融入適當課題，如數系、不等式的解區間或解區域、排列組合與機率問題，在適當的脈絡中引介，並逐步擴充其內涵。

## 釋例

1. 利用文氏圖表達四邊形類型之間的關係如下：





子集，各分支相

列方法？

除了列舉法，亦可使用文氏圖說明，A 為甲在首位方法，B 為乙在末位方法，則欲求的方法數為  $(A \cup B)'$ 。

### 錯誤類型

1. 學生較常在「且」為「交集」，「或」為「聯集」產生混淆。同時對於符號  $\cap$  與  $\cup$ ，需要一些時間才能熟悉。老師可利用形狀的特性，如「且」的前兩筆畫近似交集符號  $\cap$ ，而「或」的韻母  $\cup$  狀似聯集符號  $\cup$ ，來幫助學生記憶。（此外「且」的韻母  $\cup$  與英文 AND 的母音相同，「或」的韻母  $\cup$  與英文 OR 的母音相同。）。
2. 學生對  $\{1,1,2\}=\{1,2\}$  的理解需要說明。一種類比的方法是，同一個電腦資料夾（有如集合）之內，不容同樣名字的兩個檔案。

### 評量

1. 絕建議不列入評量的直接命題對象，可融入其他課題的評量之中。
2. 避免純粹符號操弄的題型，例如： $A=\{\emptyset,\{2\}\}$ ，下列敘述何者正確？  
(1)  $\emptyset \in A$  (2)  $\{2\} \subset A$  (3)  $\{2\} \in A$ 。  
這種題目即為「以集合為直接評量對象」，不宜。
3. 沒有情境的集合考題通常就是「以集合為直接評量對象」，不宜。

<b>D-10-2 數據分析：</b> 一維數據的平均數、標準差。二維數據的散布圖，最適直線與相關係數，數據的標準化。	d-V-2 n-V-2 g-V-5
---	-------------------------

先備：統計數據的分布 (D-9-1)。

連結：客觀機率 (D-11A,B-1)，直線方程式 (G-10-2)。

後續：離散型隨機變數 (D-12 甲,乙-1)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

就內容而言，與 99 課綱相近。但新課綱將過去 9 年級的百分位數移到此（10 年級），且本條目強調最適直線的教學重點是「先辨識可能有直線關係」，然後才討論其「最適」性。而在教法上，也建議以平均數為 0 的數據搭配通過原點的直線，作為最適直線的教學進路。

#### 2. 相關約定

- (1) 數據資料的第  $m$  百分位數記作  $P_m$ ，其中  $m$  為正整數  $1, 2, \dots, 99$ 。其詳細約定，寫在釋例中。
- (2) 此條目不含隨機變數的觀念，但是可以設計其前置經驗，例如以數列呈現數據，並以  $X$  作為數列名稱。然後，可以用  $\bar{X}$  表示數據的平均值，也可以用  $\mu_X$  和  $\sigma_X$  表示  $X$  的平均值和標準差；在不虞混淆的前提下，可以直接用  $\mu$  和  $\sigma$  表示  $X$  的平均值和標準差。
- (3) 約定一組有限數據的標準差是「變異數」的（正）平方根，而變異數是數據與平均值

之差平方的平均值。

(4) 以  $r_{XY}$  代表  $X$  和  $Y$  的相關係數，或在前後文清楚的條件下，以  $r$  代表相關係數。

### 3. 學習目標

- (1) 能綜合運用國中階段所學各種以圖形呈現數據資料的方法，能在嘗試與比對之後，根據數據的特徵而選擇適當表現數據分布狀況的圖示。
- (2) 對適當的數據資料，能將國中的四分位數相關概念延伸至百分位數。
- (3) 知道統計數據可能有略為不同的定義（例如第一四分位數），理解它們可能產生數值略為不同但意義相同的數據。
- (4) 能根據數據的特徵或欲調查之目的，選擇適當的統計量。
- (5) 能理解並計算未分組資料的百分位數，並能用於溝通和解釋。
- (6) 能理解並計算數據的平均值與標準差，並能用於溝通、解釋和預測。
- (7) 能將數據標準化，並能用於溝通、解釋和比較。
- (8) 能做並理解二維數據散布圖，觀察兩數據可能的關係，若有線型關係則能做最適直線並且理解相關係數的意義，能用於溝通、解釋和預測。

### 4. 教學斟酌

- (1) 適度與國中所習的數據圖重疊，但加深加廣其情境：包括長條圖、圓形圖、直方圖、（相對與累積次數）折線圖、盒狀圖等。所有國中階段學習的數據處理工具，都應該持續在高中課程中使用，不但不該刻意避開，反而要在適當情境中經常運用，以達到素養培育的目的。
- (2) 統計量是用來協助我們從資料中洞察趨勢、關連或特徵的工具，使用刻意設計的特殊數據，可能使得統計量失去其效用。教師可以呈現這些「失效」的可能性，學生也最好能夠辨識這些情況，以便根據資料與目的，選擇適當的統計量。但是，這些例外的情況，不宜喧賓奪主而成為教學的重點，更不宜成為評量的題目。
- (3) 承上，舉例而言，當資料量很少的時候，不適合使用百分位數；當數據之變異性不足的時候（例如雖然有 100 筆數據，卻只有兩種不同的值），並不適合用它們的四分位距表現數據的分散情況，也不宜討論它們的百分位數。
- (4) 最適直線的教學重點是先辨識可能有直線相關，然後討論其「最適」的評量標準；建議先以平均數為 0 的數據搭配通過原點的直線，推論最適直線，然後再擴及一般性的數據。教師應以方便取得的資訊工具，做數據分析的操作示範。
- (5) 原則上，本條目不使用  $\Sigma$  表示連加，請盡量在具體情境下使用 ... 或者輔以文字註解，代替  $\Sigma$  符號。甚至（對於某些學生）只要推論三筆或四筆資料的特例就足夠了。

### 條目範圍

1. 本條目不含隨機變數。
2. 僅處理未分組之數據資料。

### 釋例

未分組數據資料的第  $m$  百分位數  $P_m$  指的是同時滿足以下兩條件的數：

- 小於或等於  $P_m$  的資料數量至少占全部資料量的  $m\%$
- 大於或等於  $P_m$  的資料數量至少占全部資料量的  $(100 - m)\%$

當資料中恰有一個滿足上述條件的（原始）數據時，採用它作為  $P_m$ ；當超過一個（原始）

數據滿足上述條件時，取它們的平均值作為  $P_m$ 。

### 錯誤類型

1. 兩組數據的相關性，不能被解釋為因果性。
2. 如果不觀察散佈圖而直接計算相關係數，可能忽視了非線性關係的關聯性。

### 評量

不要刻意創造一組特殊數據，使得統計量失去意義或產生無效的結果。

<b>D-10-3 有系統的計數：</b> 有系統的窮舉，樹狀圖，加法原理，乘法原理，取捨原理。直線排列與組合。	d-V-6 d-V-7
--	----------------

**先備：**熟悉兩層以內的樹狀圖操作 (D-9-2)。

**連結：**熟悉集合間的包含關係與文氏圖 (D-10-1)，使用有系統的計數方法處理古典機率問題(D-10-4)。

**後續：**使用有系統的計數方法處理條件機率問題 (D-11A-2、D-11B-2)。

### 基本說明

#### 1. 與 99 課綱的差異

重複組合在 99 課綱是以介紹內容，不介紹符號為原則。在本條目中，原則上不含重複組合相關內容。另外有關二項式定理在 99 課綱為獨立條目，在本條目中則是以介紹二項式展開做為組合概念的說明例題，本課綱不單獨另立條目。

#### 2. 相關約定

(1)  $n!$  讀作「 $n$  階乘」， $n$  為非負整數；規定  $0! = 1$ ，當  $n$  為正數則  $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$ 。

(2) 定義  $P_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$ ，表示從  $n$  個相異物中，選出  $m$  個排成一系列的方法數，其中  $n$ 、 $m$

為非負整數且  $m \leq n$ 。 $P_m^n$  稱為排列數，建議讀作「 $P$   $N$  取  $M$ 」， $P$  是 Permutation 的縮寫。

(3) 定義  $C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ ，表示從  $n$  個相異物中，選出  $m$  個的方法數，其中  $n$ 、 $m$  為非

負整數且  $m \leq n$ 。 $C_m^n$  稱為組合數，建議讀作「 $C$   $N$  取  $M$ 」， $C$  是 Combination 的縮寫。

(4) 條目中的取捨原理也可稱為排容原理。

#### 3. 學習目標

- (1) 能藉由生活實例具體操作窮舉法，並有系統地進行表列。
- (2) 能透過繪製樹狀圖解決計數問題。
- (3) 能理解一一對應原理，並用以解決計數問題。
- (4) 能理解加法原理，並用以解決計數問題。
- (5) 能理解乘法原理，並用以解決計數問題。
- (6) 能理解取捨原理，並用以解決計數問題。
- (7) 能理解直線排列的方法與原理，並建立  $P_n^m$  的符號與數學概念的連結。
- (8) 能理解組合的方法與原理，並建立  $C_n^m$  的符號與數學概念的連結。

#### 4. 教學斟酌

- (1) 透過具體的操作(如骰子點數、倍數選取、取球…)，讓學生能了解並體驗窮舉法的過程，此處應同時呈現可連結與不可連結加法原理或乘法原理的例子。
- (2) 國中階段已經處理過兩層以內的樹狀圖，本階段教學過程著重在兩層以上及分支數不同的樹狀圖問題，以連結加法原理、乘法原理，以及將來的機率問題。
- (3) 選取適當的例題說明一一對應關係，協助學生體會從初始問題轉化為可具體操作的數學模型的歷程，並能連結常用的計數方法(如直線排列、組合…)。
- (4) 介紹加法原理及乘法原理時，應斟酌選用數據不宜過大，避免因計算量過大造成學習重點失焦。題目設計與選取應著重引導學生能利用窮舉法或樹狀圖分析問題，並綜合使用加法原理及乘法原理。
- (5) 取捨原理應連結文氏圖的概念，限制條件建議在三個以內，主要希望學生能透過文氏圖理解取捨原理並用以解決較為複雜的計數問題。
- (6) 直線排列的介紹以相異物排列、不盡相異物排列、重複排列為原則，以連結乘法原理，做為應用。此處可適當結合窮舉法、樹狀圖、加法原理、取捨原理，但不宜出現條件太過複雜的問題。
- (7) 組合觀念的介紹以延續直線排列的學習結果為出發點，藉以連結  $P_n^m$  與  $C_n^m$  的關係，並能從中了解此兩種計數模型的使用方法。
- (8) 與  $C_n^m$  有關的組合公式甚多，選用時應著重題目情境的合理性進行搭配，不應出現單獨組合公式的推演證明或是由特定組合公式所形塑之情境問題。
- (9) 二項式定理可做為組合觀念的延伸應用，僅討論基本類型及與組合的關聯性，不宜做過多的延伸及變化。

#### 條目範圍

取捨原理的問題設計應以三個限制條件以內為原則，不宜出現四個限制條件以上的問題。

#### 釋例

等式  $1=0!$  有很戲劇的效果，可善加利用。

#### 錯誤類型

1. 加法原理與乘法原理的錯誤選用。
2. 處理分堆問題時，不需要排列，會有重複計算。
3. 先選，後選所造成的重複計算問題，例如：要設置 11 人的委員會，至少需有男性委員 4 人及女性委員 4 人，若要從 7 個男生及 7 個女生中組成委員會，則共有多少種組合方式？

#### 評量

1. 不建議出現二項式定理的延伸問題如：

(1)  $\frac{1}{3}C_1^n + \frac{1}{9}C_2^n + \cdots + \frac{1}{3^n}C_n^n > 100$ ，則  $n$  最小值為多少？

(2)  $[(a+b)^2 + c]^7$  中， $a^8b^2c^2$  的係數為多少？

(3)  $(x+y+z)^{10}$  有多少不同類項？

2. 可介紹單獨的  $P_m^n$  與  $C_m^n$  的運算問題，如  $P_{n-2}^n = 6$ ， $C_n^{10} = C_6^{10}$ ，藉以熟練其運算規則，但不宜出現由  $P_m^n$  或  $C_m^n$  所組成的解方程式問題。

3. 二項式定理做為組合觀念的應用，可設計求單項係數之問題，或應用於近似值問題。若要進一步結合組合公式，則需考慮此組合公式的情境合理性。此處不宜出現此類問題：求  $(1+x^2) + (1+x^2)^2 + \cdots + (1+x^2)^{15}$  展開式中， $x^6$  項的係數。

4. 排列與組合的所有概念學習皆以  $P_m^n$  與  $C_m^n$  為基本計數模型，主要希望學生能透過樹狀圖、窮舉法對問題進行分析、分類，並透過加法原理、乘法原理、取捨原理解決問題，教學設計與題目選取不需做過多或過度複雜的安排。

<b>D-10-4 複合事件的古典機率：</b> 樣本空間與事件，複合事件的古典機率性質，期望值。
---

d-V-3
-------

先備：認識機率 (D-9-2)，古典機率 (D-9-3)。

連結：集合 (D-10-1)，有系統的計數 (D-10-3)。

後續：主觀機率與客觀機率 (D-11A-1)，條件機率 (D-11A-2)，貝氏定理 (D-11A-3)。

### 基本說明

1. 與 99 課綱的差異

(1) 期望值在 99 課綱中放在 12 年級的選修上冊，而條件機率與貝氏定理、獨立事件則全部在 10 年級。107 課綱則先在 10 年級隨同古典機率定義了期望值，但將條件機率與貝氏定理移到 11 年級。

(2) 排列組合的教學目標只含基本的排列與組合，因此在古典機率的問題中，也不應藉由太繁複的排列組合技術求樣本空間或事件的數量。

2. 相關約定

(1) 樣本空間通常以  $S$  表示，事件  $A$ 、 $B$  的和事件以  $A \cup B$  表示、積事件以  $A \cap B$  表示、餘事件以  $A'$  表示，當  $A \cap B = \emptyset$  時，稱事件  $A$ 、 $B$  為互斥事件。

(2) 事件  $A$  的機率以  $P(A)$  表示。

(3) 因不涉及隨機變數，故直接以  $m_1p_1 + m_2p_2 + \cdots + m_kp_k$  定義期望值，其中  $p_i$  是發生事件之值為  $m_i$  的機率， $i=1, 2, \dots, k$ 。

3. 學習目標

(1) 透過樣本空間個數與事件個數的比值，了解古典機率的定義  $P(A) = n(A)/n(S)$ 。

(2) 由實例說明和事件 ( $A \cup B$ )、積事件 ( $A \cap B$ )、餘事件  $A'$  的意義，並進而利用機率的性質求其對應的機率。

(3) 了解期望值為隨機試驗取值的平均概念。

#### 4. 教學斟酌

- (1) 強調古典機率是建立在每一個樣本點出現的機會均等。
- (2) 樣本空間的定義，應使古典機率可以建立在每一個樣本點出現機會均等的前提之下。
- (3) 排列組合只講授基本的排列 (P) 與組合數 (C)，因此相對應的求機率問題，也不應有繁複的排列組合問題。

#### 條目範圍

不涉及條件機率、獨立事件等相關問題。

#### 釋例

1. 投擲兩枚公正的硬幣一次，觀察其正反面，則其樣本空間應為  $\{(正、正), (反、反), (正、反), (反、正)\}$ 。根據古典機率假設樣本空間中的樣本點出現機會均等之前提，當要求出現一正一反的機率時，才會得到  $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ 。為配合古典機率的定義，不宜將樣本空間定義為  $\{(正、正), (反、反), (正、反)\}$ 。在此教學的初期，教師可用兩枚「不同」的硬幣做實驗，例如一枚 10 元硬幣和一枚 50 元硬幣，分別定義其「正」「反」面。
2. 承上，投擲兩顆公正的骰子一次，觀察其點數，其樣本空間應有 36 個元素。教師可用兩顆外形與材質相同但顏色相異的骰子呈現此實驗，以便協助分辨兩顆骰子各自的點數。

#### 錯誤類型

1. 因與排列組合相連接，學生易受到物體相同或相異所對應的取法數目不同而影響，忽略古典機率是建立在樣本點出現機會均等的條件下。  
例： $P_1$  表一次投擲一個均勻的骰子，連續投 3 次，出現 3 次 5 點的機率；  
 $P_2$  表一次投擲三個均勻的骰子，同時出現 3 個 5 點的機率。  
請問： $P_1$  與  $P_2$  何者較大？
2. 比例相等的迷思。  
例：假設  $P_1$  表丟 1 個公正硬幣 3 次中，至少出現 2 個正面的機率， $P_2$  表丟 1 個公正硬幣 300 次中，至少出現 200 個正面的機率，請問： $P_1$  與  $P_2$  何者較大？

#### 評量

1. 機率問題若使用取捨原理，以不超過三個事件為限。
2. 下列相關問題：
  - (1) 狡兔有三窟 A 窟、B 窟、C 窟，其習性為：每日夜晚，此兔會決定隔天要繼續留在原窟，或移動至另兩窟之一，而隔日留在原窟的機率為  $\frac{1}{2}$ ，移動之另兩窟之機率分別為  $\frac{1}{4}$ ， $\frac{1}{4}$ 。例如若當日在 A 窟，則隔日在 A 窟之機率為  $\frac{1}{2}$ ，移動之 B 窟、C 窟之機率分別為  $\frac{1}{4}$ ， $\frac{1}{4}$ 。已知第一次此狡兔在 A 窟，試求：第六日仍在 A 窟之機率為\_\_\_\_\_。

此題應以轉移矩陣概念解之較為合適，不宜在此作為命題方向。

## 伍、素養導向教材編寫之原則-雙向細目表及說明

### 一、素養導向教材編寫原則

素養導向教材撰寫的核心想法在於「來龍去脈」的建構。教材應營造生活、歷史或是數學的情境，讓學習者認知到特定數學知識發生的脈絡或與日常生活之間的關聯。學習任務安排應有一條明確的主軸，引領學生建立基礎的數學概念與發展相關的技能，進行探索，問題解決、找出模式並與他人溝通，幫助學生知道所學的內容在現實生活中、往後的數學學習或是專業科目的用處為何。素養導向教材須提供學習者對於數學有感的學習機會，讓學生認知到除了實用性之外，數學也有其人文、歷史或美學的層面。

以下分別說明教材的編寫原則。

#### (一) 透過現實情境、寓言故事或數學史引入教材，營造數學學習需求

教材設計可透過生活情境或是數學史來引入教學題材，讓學生認識數學在生活中的用處、特定的數學知識是如何發展起來、或是鋪排要用到某個特定的數學知識的情境，以激發學生的學習動機。教師可設想一條數學知識創造的路徑，它不一定與數學知識發展的歷史進路相符；不過，這一條路徑要帶領學生在有限的時間內，在課堂中自然地進到脈絡中學習數學、發現或創造某個知識。在學習的過程中，學生可接觸到數學的人文與歷史層面，感受到特定的數學知識為何被創造出來以解決問題或是滿足人類探索的好奇心，來引動學生的學習興趣，培養對於數學的正向態度。

#### (二) 以任務鋪陳數學學習脈絡，引導學生進行探索與發展概念

數學素養的培養著重學習者能把情境問題轉換成數學問題求解，再把數學解答帶回原先的情境進行詮釋與決策。學習任務的安排應彰顯數學做為擬經驗科學的本質，讓學生在真實或數學的情境中，在教師的引導下，進行操作、探索、分析、比較，從中歸結出相關的原理原則。情境脈絡在素養教材中具備兩種功能：首先是讓學生應用學到的知識或技能；另外一個為運用情境脈絡的安排與鋪陳來發展學生相關的數學概念，讓學生有機會去學習重要數學內容與發展數學思維。

#### (三) 讓學生運用相關數學知識與能力解決問題，提出合理的觀點與他人溝通

素養教材除了引導學生探索概念、建構知識與發展相關技能之外，也設計讓學生須應用所學到之知識或技能來解決的問題。這些問題不一定是日常生活中的問題，也可以是數學本身的問題。學生在解決問題之後，教師應提供機會讓學生針對答案提出個人詮釋並和他人溝通想法；經由和老師與同儕之間的互動，討論、質疑與辯證中建構數學知識。教師可藉由鼓勵不同觀點的提出，提供參與學習的機會，幫助學生經由課室的討論來澄清與反思自己的想法。

#### (四) 教材安排從具體到抽象，提供學生有感的學習機會

素養教學活動設計讓學生在任務中進行操作、探索，再逐步進到抽象概念的學習；提供學生機會去感受數學是人類的活動，而不只是一堆冷冰冰的公式、符號或是反覆的解題練習。當學生在情境脈絡中進行數學活動，像是識別規律、建立模式與進行論證，和同儕共同合作解決問題或是挑戰彼此的想法等等，他們就有機會經驗到類似數學家在數學社群中的活動，感受到數學的人文成分，這樣的數學學習是活的、有感覺的。

#### (五) 教材設計具備多重表徵

素養教材應運用表格、圖形、文字與數字等多種表徵，在中學階段可引進計算機工具與動態幾何環境等資訊工具，打造豐富的學習環境，讓學生進行表徵間的轉換，並鼓勵學生運用多種表徵表達他們的想法並和同儕、教師進行數學對話。多重表徵對於學生的數學概念與關係的理解以及現實生活的應用相當重要，它可以幫助學生有效組織其想法與和教師、同儕進行溝通。以多重表徵進行教學有助於學生認知思考層次的提昇與靈活思考，發展邏輯的解題策略，促進有意義的學習連結不同的表徵並應用於解題中。

#### (六) 學習任務具備形成性評量的功能，以評估與促進數學學習

當教師應用素養教材進行教學時，必須整合教學與評量，評量是教學重要的一環，而不是只有教學結束後為之，才能對所有學生提供高品質的教學與促進深入理解。因此，學習任務須具備形成性評量的功能，要求學生說明想法或是解法以及提出論述。當學生在進行學習任務時，教師可以從學生的作答瞭解其學習狀況，發生了哪些困難或是迷思概念，以及確認學生的學習現況與學習目標之間的落差，並以此為基礎規劃後續的教學以促進數學的學習。

以下分階段以表格呈現如何結合學習表現與學習內容來開發素養導向教材。

## 二、國民小學教育階段

以核心素養「數-E-A2 具備基本的算術操作能力、並能指認基本的形體與相對關係，在日常生活情境中，用數學表述與解決問題」為例，素養教材設計如下表所示：

學習表現 學習內容	s-III-1 理解三角形、平行四邊形與梯形的面積計算。 n-III-11 認識量的常用單位及其換算，並處理相關的應用問題。
S-5-2 三角形與四邊形的面積：操作活動與推理。利用切割重組，建立面積公式，並能應用。 N-5-12 面積：「公畝」、「公頃」、「平	第三學習階段：五年級○學期（看課程安排） 單元名稱：三角形與四邊形面積公式的應用 學習目標： 1. 能夠切割拼合平面圖形，知道面積在此操作下的影響。 2. 以切割拼合方式，學習如何計算三角形和四邊形的面積。 3. 將面積計算和「公畝」、「公頃」、「平方公里」的學習結合，可以



方公里」。生活實例之應用。含與「平方公尺」的換算與計算。使用概數。	計算大區域之面積。 4. 引入大面積有關之應用問題，讓學生討論與應用。
-----------------------------------	--

**設計說明：**

學習日常生活中和面積相關的問題，在設計上的基本理念，可先透過面積公式的揭露，利用圖形的切割組合，讓學生理解各種面積計算的由來，並歸結為面積公式，來解決生活中有關面積的問題。

(完整的單元教案請閱柒、教學單元案例，此教案假設為 N-5-12 教學完成後之應用，並作為 S-5-2 教學之前置活動。)

### 三、國民中學教育階段

以核心素養「數-J-A2 具備有理數、根式、坐標系之運作能力，並能以符號代表數或幾何物件，執行運算與推論，在生活情境或可理解的想像情境中，分析本質以解決問題」為例，素養教材設計如下表所示：

學習表現 學習內容	S-IV-12 理解直角三角形中某一銳角的角度決定邊長的比值，認識這些比值的符號，並能運用到日常生活的情境解決問題。
S-9-5 直角三角形的三角比：對直角三角形的一個銳角定義「斜邊」、「鄰邊」、「對邊」，並引入符號 $\tan A$ 、 $\sin A$ 、 $\cos A$ ；直角三角形內，給定一邊的長和一個銳角的角度，決定另一邊的邊長。(學生無使用計算機時，角度限於 30 度、45 度、60 度)。	<p>第一學習階段：九年級 (實施 5 節課)</p> <p>單元名稱：直角三角形的三角比</p> <p>學習目標：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 認識坡度的計算方式，即直角三角形中某一銳角的對邊與鄰邊的比值。</li> <li>2. 透過製圖、測量發現不同坡度的直角三角形與所對應的銳角度數的關係；相同坡度，大小不同的直角三角形，其對應的銳角度數相等。</li> <li>3. 認識直角三角比 <math>\tan A</math>、<math>\sin A</math>、<math>\cos A</math> 的意義。</li> <li>4. 計算特殊角的直角三角比。</li> <li>5. 透過計算機的直角三角比(<math>\tan A</math>、<math>\sin A</math>、<math>\cos A</math>)的按鍵，幫助解決生活中的應用問題。</li> </ol>

**設計說明：**

自九年一貫實施後，三角函數這個單元已經沒有再出現於國中的課程綱要與教科書中，雖然高中數學課程也對此單元做了鋪陳，然而整體成效已不如早期課程安排分屬於國中、高

中二階段的學習方式。因此十二年國民基本教育數學領域課程綱要參考以往的數學課程標準與其他國家的做法，以及考量三角函數的學習銜接與成效，將直角三角比放入國中階段的九年級教授。教學內容聚焦在直角三角形特殊角的邊角性質與應用，並引入計算機，至於在以往課程所教授的三角函數關係：倒數關係、平方關係與商數關係與餘角關係，則延後至高中數學教授。(完整的單元教案請閱柒、教學單元案例。)

#### 四、普通型高級中等學校教育階段

以核心素養「數-S-U-B1 具備描述狀態、關係、運算的數學符號的素養，掌握這些符號與日常語言的輔成價值；並能根據此符號執行操作程序，用以陳述情境中的問題，並能用以呈現數學操作或推論的過程。」以及「數-S-U-B2 具備正確使用計算機和電腦軟體以增進學習的素養，包含知道其適用性與限制、認識其與數學知識的輔成價值，並能用以執行數學程序。能解讀、批判及反思媒體表達的資訊意涵與議題本質。」為例，素養教材設計如下表所示：

學習表現 學習內容	n-V-1 理解實數與數線的關係，理解其十進位表示法的意義，理解整數、有理數、無理數的特質，並熟練其四則與次方運算，具備指數與對數的數感，能用區間描述數線上的範圍，能用實數描述現象並解決問題。
<p>N-10-1 實數：數線，十進制小數的意義，三一律，有理數的十進制小數特徵，無理數之十進制小數的估算 (<math>\sqrt{2}</math> 為無理數的證明 ★)，科學記號數字的運算。</p> <p>N-10-4 常用對數：log 的意義，有效位數與科學記號連結，使用計算機的<math>10^x</math>鍵和 log 鍵。</p>	<p>第四學習階段：10 年級第一學期 (實施 4 節課)。</p> <p>單元名稱：科學記號與 10 的冪次。</p> <p>學習目標：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 理解「取三位小數」、「準至千分位」、「以兩位有效數字作計算」等類型的語言，並能用以溝通，例如將任意數依指令寫成正確的概數。</li> <li>2. 能操作科學記號的加減乘除運算。</li> <li>3. 能使用計算機做四則運算、計算 <math>10^x</math> 的值、計算 <math>\log x</math> 的值，並明白其值僅為估計。</li> <li>4. 能用計算機的 <math>x^y</math> 功能，探索形如 <math>(1.01)^x = 2</math> 之方程式的近似解。</li> <li>5. 能轉換科學記號數字與 10 的冪次，藉以理解 log 數值之整數與小數部分的意義，並建立 10 的冪次與對數的數感 (亦即不使用計算機而粗略估計 10 的冪次或對數的值)。</li> <li>6. 理解 <math>\log a</math> 的意義就是 <math>10^{\log a} = a</math>，其中 <math>a</math> 為正數。反之，任意正數 <math>a</math> 都可以改寫成 <math>10^{\log a}</math>。能用 log 符號紀錄或表達數值。</li> </ol>

### 設計說明：

以往的課程安排，「科學記號的運算」是在國一上學期，待國二學習理化的時候才使用，這對許多學生來說，造成一些學習上的困難。現今國中的理化課程已將科學記號使用的部分簡化，所以 107 課綱將其移至高一（10 年級），並建議它出現在上學期的第一章，不僅能使國高中的課程銜接順暢，也顧及學生學習的成熟度。同時，「10 的冪次方與常用對數符號」原本為高一上學期第三章「指對數函數」的一部分，基於新課綱『先（高一）建立以符號表達數量的基本觀念，第二次教學（高二介紹指對數函數）再進入形式運思，也就是抽象概念與代數性質』的精神，這裡的教材應著重培養數量感與符號理解。

在資訊流通量爆炸的時代，如何使用正確的數學語言來溝通，培養正確的數感，是科學素養的一部分。本單元教材選取了高中生所知道的自然科學情境中，使用數學來處理極大數與極小數的那一部分，連結到數學知識與符號的使用，在情境中解決數學問題、學習使用計算器輔助，同時體會到符號出現的脈絡與必要性，達到符合數學素養教材的目標。（完整的單元教案請閱柒、教學單元案例。）

## 陸、數學領域之議題融入說明

面對變化快速的時代，學校教育需與社會脈動緊密連結，在課程發展中融入相關議題。議題融入的目標在培養學生批判思考及解決問題的能力，提升面對議題的責任感與行動力，實踐「尊重多元、同理關懷、公平正義、永續發展」等核心價值，成為健全個人、良好國民與世界公民。

### 一、融入議題之選擇

本領域融入議題的選擇為呼應總綱及領綱的核心素養，並連結、延伸、統整及轉化本領域的學習重點，包含四項重大議題及十五項相關議題。課程綱要「附錄二」中明列了「性別平等教育、人權教育、環境教育、海洋教育」四項重大議題之學習主題與實質內涵，其不但是國家當前重要政策，且為延續九年一貫課程之重大議題，以及培養現代國民與世界公民之關鍵內涵。十五項相關議題有「品德教育、科技教育、家庭教育、生涯規劃教育、多元文化教育、閱讀素養教育、戶外教育、國際教育」等。其中「品德教育、多元文化教育、國際教育」已納入《總綱》核心素養，且轉化為領綱核心素養。「科技教育、家庭教育、生涯規劃教育、閱讀素養教育、戶外教育」等議題之內涵，亦能呼應本領域之學習重點，深化與拓展本領域的學習。

### 二、議題融入之做法

議題多來自於生活事件或社會現象，故在設計議題融入課程，應思考本領域之「學習重點」與議題「學習主題和實質內涵」兩者呼應關係，並透過連結、延伸、統整與轉化等方式，發展學習目標，設計適切的課程內容，彰顯總綱及領綱之核心素養。

議題融入之作法，宜結合學生的舊經驗、生活情境或時事，善用多元的教學方法，透過體驗、省思、實踐的歷程，增進學生學習品質及培養探究、思辨與實踐的能力。再者，素養導向的課程歷程隱含著議題的潛在學習，學生透過任務或問題的覺察、規劃和執行，或與他人共同合作，其間所產生各種互動情境，如：爭執或協商等，皆可成為教師適時引導達成人權教育、性別平等教育、法治教育等實質內涵的具體做法。此外，議題亦具有跨學科性質，可藉由跨領域統整課程突顯議題教育的特色，拓展學生學習視角，期使對生活現象獲致較豐富多元與完整的認識，裨益核心素養的陶養。有關議題融入的具體作法可參考「議題融入說明手冊」。

### 三、議題融入之示例說明

四重大議題融入本領域學習重點示例的說明，係以本領域課程綱要「附錄二」為發展依據，茲舉例如下：

## (一) 性別平等教育議題

學習主題	實質內涵	融入課程綱要學習重點之示例	說明
性別權益 與公共參與	性 E9 檢視校園中空間與資源分配的性別落差，並提出改善建議。	d-III-1 報讀圓形圖；製作長條圖、折線圖與圓形圖，並據以做簡單推論。 d-III-2 能從資料或圖表的資料數據，解決關於「可能性」的簡單問題。	透過長條圖、折線圖與圓形圖等製作，運用校園空間與資源分配等數據資料，如：廁所間數，以檢視與了解可能存在的性別資源落差，並提出改善的方法。
	性 J10 探究社會中資源運用與分配的性別不平等，並提出解決策略。	d-IV-1 理解常用統計圖表，並能運用簡單統計量分析資料的特性及使用統計軟體的資訊表徵，與人溝通。 D-7-1 統計圖表：蒐集生活中常見的數據資料，整理並繪製成含有原始資料或百分率的統計圖表：直方圖、長條圖、圓形圖、折線圖、列聯表。遇到複雜數據時可使用計算機輔助，教師可使用電腦應用軟體演示教授。	1.在學習統計概念時，如：百分比、統計圖表等，可透過校園空間、資源分配運用等資料，進行統計圖表分析中，以理解資源運用與分配在性別上的差異。 2.可利用性別統計資料來設計學習任務或布題，讓學生在學習數學能力過程中，藉此認識與提昇性別平等意識。

## (二) 人權教育議題

學習主題	實質內涵	融入課程綱要學習重點之示例	說明
人權與責任	人 J2 關懷國內人權議題，提出一個符合正義的社會藍圖，並進行社會改進與行動。	d-IV-1 理解常用統計圖表，並能運用簡單統計量分析資料的特性及使用統計軟體的資訊表徵，與人溝通。	能運用統計圖表，針對國內外相關人權議題的數據資料進行簡單統計量分析與解讀，並透過數字理解真實社會存在的偏見、貧窮、不公平、不正義等現象，擬定社會改進與行動策略，培養

學習主題	實質內涵	融入課程綱要學習重點之示例	說明
			道德思辨的素養與公平正義的價值。

### (三)環境教育議題

學習主題	實質內涵	融入課程綱要學習重點之示例	說明
災害防救	環 U9 分析實際監測數據，探究天然災害頻率的趨勢與預估。 環 U11 運用繪圖科技與災害資料調查，繪製防災地圖。	d-V-4 認識隨機變數，理解其分佈概念，理解其參數的意義與算法，並能用以推論和解決問題。	在數學學習任務中，藉由觀察、蒐集、記錄、分析等方式，探討或推測天然災害頻率的趨勢和發展，並運用分佈概念，進行災害資料調查與防災地圖繪製。

### (四)海洋教育議題

學習主題	實質內涵	融入課程綱要學習重點之示例	說明
海洋科學與技術	海 U12 了解海水結構、海底地形及洋流對海洋環境的影響。	d-V-3 理解事件的不確定性，並能以機率將之量化。理解機率的性質並能操作其運算，能用以溝通和推論。	以海水結構、海底地形或洋流做為學習任務的情境設計，結合不確性的概念及量化分析，處理相關問題並提出合理的見解。

## 柒、教學單元案例

### 一、國小組—三角形與四邊形面積公式的應用

#### (一) 教學設計理念說明

##### 1. 背景

本單元主要透過將長方形、三角形的重新切割及組合，讓學生理解面積的意義，並且能透過理解面積公式進而應用公式來解決生活中有關面積的問題。

##### 2. 設計理念

在數學的領域中，點、線、面的觀念常常被提到，生活中也常常會遇到面積的問題，例如比較物品表面大小等問題，透過面積公式雖然可以輕鬆解決問題，但在數學領域講究的是理解，因此在設計上的基本理念，主要先透過面積公式的揭露，然後利用各種圖形的圖片切割組合，來讓學生理解各種面積公式的由來，而且能夠將面積公式作應用，來解決生活中有關面積的問題。

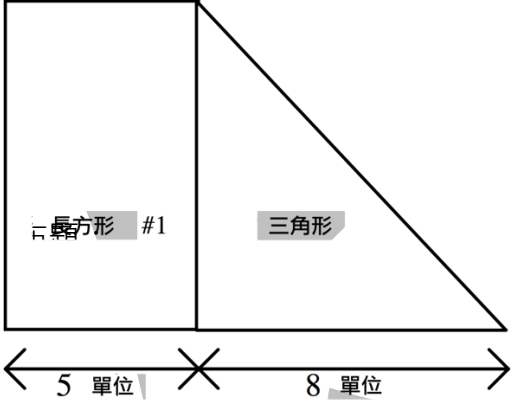
#### (二) 教學單元案例

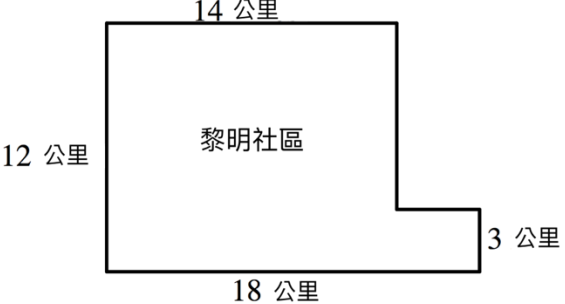
領域/科目	數學		林淑君
實施年級	五年級		共 3 節，120 分鐘
單元名稱	三角形與四邊形面積公式的應用		
<b>設計依據</b>			
學習重點	學習表現	s-III-1 理解三角形、平行四邊形與梯形的面積計算。 n-II-9 理解長度、角度、面積、容量、重量的常用單位與換算，培養量感與估測能力，並能做計算和應用解題。認識體積。	核心素養 數-E-A2 具備基本的算術操作能力、並能指認基本的形體與相對關係，在日常生活情境中，用數學表述與解決問題。 數-A3 具備轉化現實問題為數學問題的能力，並探索、擬定與執行解決問題計畫，以及從多元、彈性與創新的角度解決數學問題，並能將問題解答轉化運用於現實生活。 數-E-B1 具備日常語言與數字及算術符號之間的轉換能力，並能熟練操作日常使用之度量衡及時間，認識日常經驗中的幾何形體，並能以符號表示公式。
	學習內容	S-5-2 三角形與四邊形的面積：操作活動與推理。利用切割重組，建立面積公式，並能應用。 N-5-12 面積：「公畝」、「公頃」、「平方公里」。生活實例之應用。含與「平方公尺」的換算與計算。使用概數。	
議題	實質內涵	人權教育：E20 認識生活中不公平、不合理、違反規則和健康受到傷害等經	

融入		驗，並知道如何尋求救助的管道。 環境教育：E30 覺知人類的生活型態對其他生物與生態系的衝擊。
	所融入之學習重點	人權教育： 1. 能理解農藥是毒藥，日常食用的蔬果，在生長過程中，大多有噴灑農藥。 2. 能留意食安新聞，關注農藥飄散、農藥殘留的問題，成為食安小尖兵。  環境教育，能理解 1. 台灣氣候高溫多濕，各項作物在生長期間容易罹病，尤其蔬果類很容易遭受病蟲害侵襲。為確保蔬果產量與品質，農民無法避免使用農藥，因為農藥防治病蟲害較其他防制法快捷而有效。 2. 農藥過量使用，產生許多問題，不但增加作物生長成本，且直接威脅到人體健康與造成環境污染。
與其他領域/科目的連結	自然、社會、健康教育	
教材來源	自編教材	
教學設備/資源		
<b>學習目標</b>		

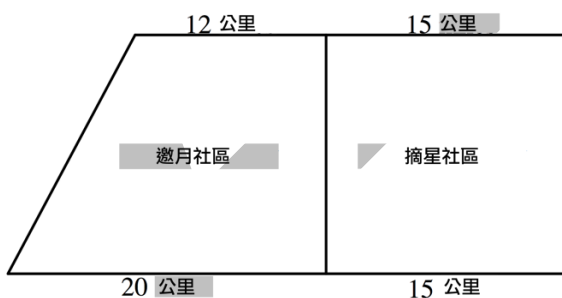
<b>教學活動設計</b>		
<b>教學活動內容及實施方式</b>	<b>時間</b>	<b>備註</b>



 <p>你怎麼知道的?</p> <p>較大? 你怎麼知道</p>	<p>問題 1 15 分鐘</p> <p>問題 2 15 分鐘</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•分組教學，教師布題，說明題意，並確認學生理解題意。</li> <li>•學生分組討論並發表。</li> <li>•學生雖熟悉長方形面積的計算方式，但本題並沒有假設另一邊長。學生可以靠視覺的直覺，也可以察覺長方形#2 可以擺在長方形#1 內。</li> </ul> <ul style="list-style-type: none"> <li>•分組教學，教師布題，說明題意，並確認學生理解題意。</li> <li>•學生分組討論並發表。</li> <li>•引導學生觀察此三角形面積其實和上題的長方形#2 面積一樣。</li> <li>•由此初步討論直角三角形面積的計算方式。</li> </ul>
<p>活動 2：</p> <p>黎明社區管理委員會正在討論一項提案：是否要噴灑農藥以控制社區內豌豆的病蟲害。社區內大部分的農民都支持該項計劃，因為病蟲害會影響豌豆的收成。但社區內有一個環保團體反對該計劃，因為農藥飄散可能會提高農藥對非豌豆種植區內的作物、家畜、居民和野生動植物的健康危害風險。更造成藥物進入非豌豆區的作物、土壤、水體，污染農產品與環境，間接提高了農藥經由食物鏈進入其他生物並造成危害的機會。</p> <p>將學生分成兩組，分別代表農民及環保團體，搜集整理應該</p>	<p>布題 10 分鐘</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•教師布題，說明題意，並確認學生理解題意。</li> <li>•指派學生課後作業，搜集與問題 1 相關資料(可</li> </ul>

<p>/不應該噴灑農藥來提高豌豆的產量的相關資料。</p> <p>A.下面有 3 個問題，請學生分組討論與發表：</p> <p>教師布題：</p> <p>1.全班分成兩組，分別代表農民及環保團體，陳述應該/不應該噴灑農藥來提高豌豆的產量。</p> <p>教師布題：</p> <p>2.下圖是黎明社區的地圖。構成邊界的線段都是互相垂直的線段。</p>  <p>B.下面是農民團體計畫噴灑農藥的情形：</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>•空中噴灑估計的費用是每公頃 2200 元。</li> <li>•1 平方公里是 100 公頃。</li> <li>•計畫支持者引用一項研究，指出每消費 1 元殺蟲劑，農民將通過增加農業生產獲得 4 元。</li> </ul> <p>根據上面的條件，回答下面的問題：</p> <p>1.黎明社區的面積是多少平方公里？多少公頃？</p> <p>2.噴灑整個社區的成本是多少？</p> <p>3.農民可以從中獲得多少錢？</p>	<p>辯論課</p> <p>40 分鐘</p> <p>問題 2</p> <p>20 分鐘</p>	<p>與社會、自然、健康教育相關課程結合)。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>•利用辯論活動，讓學生發表所支持觀點的理由。</li> <li>•分組教學，教師布題，說明題意，並確認學生理解題意。</li> <li>•學生分組討論並發表。</li> <li>•本題首先要討論面積如何計算，因為策略多元，適合討論發表。</li> <li>•另一重點是 1 平方公里等於 100 公頃。教師要明白告知此約定。</li> </ul>
---	---	---

教師布題：



※除了邀月社區的西邊界，所有邊界都是南北向或東西向。

邀月社區和摘星社區的住戶，互相在爭論一事情，他們都覺得自己的社區比對方的社區大。誰是對的？寫一個解決這個爭論的解釋。

問題 3  
20 分鐘

- 分組教學，教師布題，說明題意，並確認學生理解題意。

- 學生分組討論並發表。
- 教師回顧活動 1 的經驗。先討論再引導學生認識這個梯形的面積要如何恰當的和又邊長方形比較。

- 由此初步討論這種梯形面積的計算方式。

教案後續展望：

- 利用這些切割拼合的經驗，後續教案可以討論一般三角形或梯形、平行四邊形等四邊形的面積計算方式，並以公式記錄其計算方式。才能完成 S-5-2。

- N-5-12 並未完成。但也可作為 N-5-12 教學的應用單元。

## 二、國中組—直角三角形的三角比

### (一) 教學設計理念說明

#### 1. 背景

原先在 83 年課程標準、74 年課程標準與 61 年課程標準均有放入銳角三角函數的內容，以 83 年課程標準所出版的數學教科書(國立編譯館，2000)為例，將銳角三角函數放到第六冊的選修數學，其標題為「銳角三角函數及其簡易應用」，在基礎篇中，課本營造問題情境，並界定鄰邊、對邊與複習相似形的概念，而後教授兩個特殊直角三角形( $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 與  $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ )的邊長比，才介紹正弦、餘弦與正切函數的概念，至於餘切、正割與餘割函數的概念因時間與篇幅關係略去不教，並明確說明商數關係、平方關係與餘角關係；在應用篇中，課本介紹作圖法、查表法與運用電算器求三角函數值，之後進行三角函數的簡單應用。

#### 2. 設計理念

自九年一貫實施後，三角函數這個單元已經沒有再出現於國中的課程綱要與教科書中，雖然高中數學課程也對此單元做了鋪陳，然而整體成效已不如早期課程安排分屬於國中、高中二階段的學習方式。因此十二年國民基本教育數學領域課程綱要參考以往的數學課程標準與其他國家的做法，以及考量三角函數的學習銜接與成效，將直角三角比放入國中階段的九年級教授。教學內容聚焦在直角三角形特殊角的邊角性質與應用，並引入計算機，至於在以往課程所教授的三角函數關係：倒數關係、平方關係與商數關係與餘角關係，則延後至高中數學教授。

### (二) 教學單元案例

領域/科目	數學	設計者	原作者：鄧家駿教師、曾明德教師 改寫者：莊國彰校長、賴政泓教師
實施年級	九年級	總節數	共 5 節，225 分鐘 (摘錄 2 節)
單元名稱	直角三角形的三角比		
<b>設計依據</b>			
學習重點	學習表現	S-IV-12 理解直角三角形中某一銳角的角度決定邊長的比值，認識這些比值的符號，並能運用到日常生活的情境解決問題。	核心素養 數-J-A2 具備有理數、根式之運作能力，並能以符號代表數或幾何物件，執行運算與推論，在生活情境或可理解的想像情境中，分析本質以解決問題。 數-S-A2 具備數學模型的基本工具，以數學模型解決典型的現實問題。瞭解數學在觀察歸納之後還須
	學習內容	S-9-5 直角三角形的三角比：對直角三角形的一個銳角定義「斜邊」、「鄰邊」、「對邊」，並引入符號 $\tan A$ 、 $\sin A$ 、 $\cos A$ ；	

		直角三角形內，給定一邊的長和一個銳角的角度，決定另一邊的邊長。(學生無使用計算機時，角度限於 30 度、45 度、60 度)。		演繹證明的思維特徵及其價值。 數-J-B1 具備處理代數與幾何中數學關係的能力，並用以描述情境中的現象。能在經驗範圍內，以數學語言表述平面的基本關係和性質。 數-J-B2 具備正確使用計算機以增進學習的素養，包含知道其適用性與限制、認識其與數學知識的輔成價值、並能用以執行數學程序。
議題融入	實質內涵	安全教育：山坡坡度與土石流（無障礙通行空間坡道的設置）。		
	所融入之學習重點	使用 $\tan A$ 的定義計算山坡的坡度：實際測量公共空間的無障礙坡道，並透過計算 $\sin A$ 、 $\cos A$ 或 $\tan A$ 的值，利用計算機反推「坡面與水平面夾角」是否符合政府規定。		
與其他領域/科目的連結				
教材來源				
教學設備/資源		方格紙、直尺、量角器、計算機。		
<b>學習目標</b>				
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 認識坡度的計算方式，即直角三角形中某一銳角的對邊與鄰邊的比值。</li> <li>2. 透過製圖、測量發現不同坡度的直角三角形與所對應的銳角度數的關係；相同坡度，大小不同的直角三角形，其對應的銳角度數相等。</li> <li>3. 認識直角三角比 <math>\tan A</math>、<math>\sin A</math>、<math>\cos A</math> 的意義。</li> <li>4. 計算特殊角的直角三角比。</li> <li>5. 透過計算機的直角三角比 (<math>\tan A</math>、<math>\sin A</math>、<math>\cos A</math>) 的按鍵，幫助解決生活中的應用問題。</li> </ol>				
<b>教學活動設計</b>				
<b>教學活動內容及實施方式</b>			<b>時間</b>	<b>備註</b>
在網站的自行車討論綜合區出現以下的照片與一長串的討論：			10 分鐘	引起動機： 以生活中險升坡的交通標誌，引起學生對於坡度的好奇心。

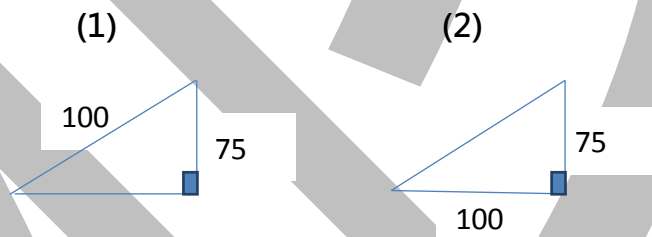


阿文：「這是環島時拍到的，這個交通標誌是不是標示錯誤！」

小堅：「忘了點小數點吧，或者是你漏看，如果是 7.5%，看起來滿像的。」

阿文：「真的是寫 75% 不是 7.5%，google 地圖，附上連結，可以看到 google 上面的照片，」

**任務一**：請畫出該險升坡，並在圖中呈現「75%」這個訊息。



教師可以請學生指出學生手冊上所描述「75%等於是每前進 100 公尺會上升 75 公尺。」的圖形是他們所畫的哪一個？

**結論：**

15 分鐘

藉由畫圖的方式，引導出學生將生活情境的問題抽象成數學情境。

因為此目標是要學生了解坡度的意義，尚無需在方格紙上作圖。

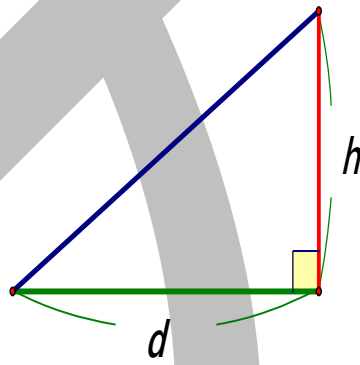
總結學生的討論與引導，依據學生手冊上的說法，將每前進 100 公尺解釋成水平距離，而不是斜邊(實際路面)。

坡度的意義和表示方式：

以坡面上兩點間的「高度差」  
除以兩點間的「水平距離」，

$$\text{即 } T(\text{坡度}) = \frac{\text{高度差}}{\text{水平距離}} = \frac{h}{d}, \text{ 其}$$

中  $h$  表示高度差， $d$  表示水平距離。坡度在道路上的標示常以「百分率」的形式出現。



20 分鐘

**任務二**：給定 75% 和 7.5% 的坡度，讓學生在方格紙(附件一)上畫出對應的直角三角形，並以量角器量出此角的角度。

1. 建議在製圖前先跟學生約定製圖時的水平方向與斜邊繪製的位置，以確認學生知道測量角度是指水平方向與斜邊的夾角。
2. 學生可能的答案：  
學生使用量角器測量兩個直角三角形的角度，「坡度 75%」大約是 36~37 度，另一個「坡度 7.5%」大約 4~5 度。
3. 學生在畫坡度 7.5% 時，有的會反應方格紙不夠大張，教師可以透過約分或擴分來提示，例如  $\frac{7.5}{100} = \frac{75}{1000} = \frac{3}{40} = \frac{?}{20} = \frac{?}{4}$ 。

**課堂討論(一)**：

坡度(比值)相同時，可由 SAS 相似條件得知三角形皆相似，並依三角形相似性質可得此時：水平方向與斜邊的夾角相同。

**第一節結束**

15 分鐘

**任務三**：讓學生繪製一個  $\angle A = 60$  度的直角三角形，計算其坡度，並討論與「坡度 75%」、「坡度 7.5%」的直角三角形比較。

1. 跟學生約定將  $\angle A = 60$  度擺放在水平方向與斜邊的夾角。

讓學生思考同一坡度的直角三角形，畫出來可能大小不盡相同，但量出來的角度應是“大約”相等或是“必定相等”。

讓學生思考如何在有限範圍的方格紙中，畫出 75% 和 7.5% 的坡度(相似形性質的應用)

- 仍請學生繪製在附件一的方格紙，以方便跟「坡度 75%」、「坡度 7.5%」的直角三角形比較。
- 學生估算出來的坡度，是透過直尺測量高度  $h$  (60 度的對邊長)、水平距離  $d$  (60 度的鄰邊長)，將高度  $h$  除以水平距離  $d$ ，可以得到比較好的估算結果約為 1.7 左右。

#### 課堂討論(二)：

角度相同時，可由 AA 相似條件得知三角形皆相似，並依三角形相似性質可得此時：高度與水平距離的比值相同。

**任務四**：繪製「坡度 1」的直角三角形，來推算角度。

**任務五**：繪製  $\angle B = 45$  度的直角三角形，來推算坡度。

#### 結論：

由前面的兩個任務可以發現，兩個直角三角形，當銳角的角度相等時，其  $\frac{h}{d}$  的比值也會相等。

學生在此須思考並決定此直角三角形的水平距離。讓學生使用量角器畫出 60 度角。

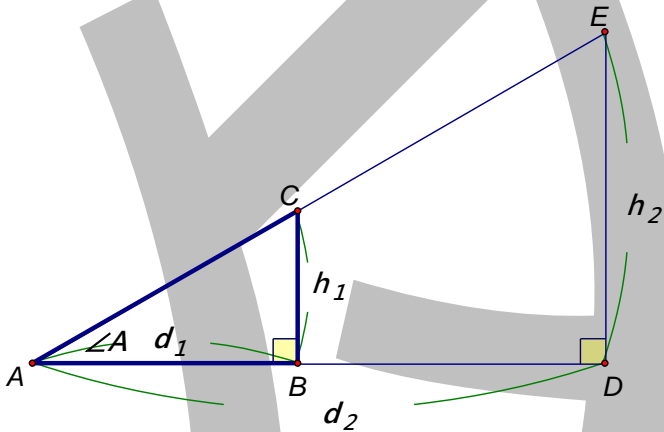
讓學生思考，當角度相同，大小不同的直角三角形，其坡度應是「大約相等」或是「必定相等」。

20 分鐘

呼應課堂討論(一)，並由此題得到精確角度。



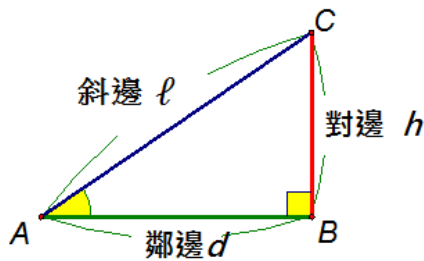
同樣地，兩個直角三角形，當它們  $\frac{h}{d}$  的比值相等時， $h$  的對角角度也會相等。



呼應課堂討論(二)，並由此題得到精確比值。

呼應了學習內容 S-9-4 相似直角三角形邊長比值的不變性：直角三角形中某一銳角的角度決定邊長比值，該比值為不變量，不因相似直角三角形的大小而改變。

■ 直角三角形中，對於某一個銳角而言，介紹其鄰邊與對邊。



■ 由坡度的計算引入  $\tan A = \frac{h}{d} = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$ ，舉例並計算

$\tan 60^\circ = \sqrt{3} \approx 1.732$  呼應 **任務三** 的結果。

第二節結束

試教成果：

參考資料：

本教案改寫自「素養導向教學模組-直角三角比單元」之學生手冊與教師手冊

網址：<http://12cur.naer.edu.tw/category/post/277>

附錄：

### 三、高中組—科學記號與 10 的冪次

#### (一)教學設計理念說明

##### 1. 背景

107 課綱將科學記號的運算從國中移到高中，指對數中的「10 的冪次」、「認識常用對數的符號」與「計算機的使用」皆在高中課程中第一次出現。

##### 2. 設計理念

以往的課程安排，「科學記號的運算」是在國一上學期，待國二學習理化的時候才使用，這對許多學生來說，造成一些學習上的困難。現今國中的理化課程已將科學記號使用的部分簡化，所以 107 課綱將其移至高一（10 年級），並建議它出現在上學期的第一章，不僅能使國高中的課程銜接順暢，也顧及學生學習的成熟度。同時，「10 的冪次方與常用對數符號」原本為高一上學期第三章「指對數函數」的一部分，基於新課綱『先（高一）建立以符號表達數量的基本觀念，第二次教學（高二介紹指對數函數）再進入形式運思，也就是**抽象概念與代數性質**』的精神，這裡的教材應著重培養數量感與符號理解。

在資訊流通量爆炸的時代，如何使用正確的數學語言來溝通，培養正確的數感，是科學素養的一部分。本單元教材選取了高中生所知道的自然科學情境中，使用數學來處理極大數與極小數的那一部分，連結到數學知識與符號的使用，在情境中解決數學問題、學習使用計算器輔助，同時體會到符號出現的脈絡與必要性，達到符合數學素養教材的目標。本單元教材並融入了「安全教育」議題。

#### (二) 教學單元案例

領域/科目	數學科	設計者	吳汀菱、洪瑞英
實施年級	十年級	總節數	共 4 節，200 分鐘
單元名稱	科學記號與 10 的冪次		
<b>設計依據</b>			
學習重點	學習表現	n-V-1 理解實數與數線的關係，理解其十進位表示法的意義，理解整數、有理數、無理數的特質，並熟練其四則與次方運算，具備指數與對數的數感，能用區間描述數線上的範圍，能用實數描述現象並解決問題。	核心素養 數S-U-B1 具備描述狀態、關係、運算的數學符號的素養，掌握這些符號與日常語言的輔成價值；並能根據此符號執行操作程序，用以陳述情境中的問題，並能用以呈現數學操作或推論的過程。 數S-U-B2 具備正確使用計算機和電腦軟體以增進學習的素養，包含知道其適用性與限制、認識其與數學知識的輔成價值，並能用以執
	學習內容	N-10-1 實數：數線，十進制小數的意義，三一律，有理數的十進制小數特徵，無理數之十進制小	

		數的估算 ( $\sqrt{2}$ 為無理數的證明★)，科學記號數字的運算。 N-10-4 常用對數： $\log$ 的意義，有效位數與科學記號連結，使用計算機的 $10^x$ 鍵和 $\log$ 鍵。		行數學程序。能解讀、批判及反思媒體表達的資訊意涵與議題本質。
議題融入	實質內涵	安全教育：防範事故傷害發生以確保生命安全。		
	所融入之學習重點	使用科學記號運算生活中常用的濃度單位 ppm 及酸鹼值 pH。		
與其他領域/科目的連結		物理、化學。		
教材來源		自編教材。		
教學設備/資源		計算機、A3 紙張若干、膠帶。		
<b>學習目標</b>				
<ol style="list-style-type: none"> <li>理解「取三位小數」、「準至千分位」、「以兩位有效數字作計算」等類型的語言，並能用以溝通，例如將任意數依指令寫成正確的概數。</li> <li>能操作科學記號的加減乘除運算。</li> <li>能使用計算機做四則運算、計算 <math>10^x</math> 的值、計算 <math>\log x</math> 的值，並明白其值僅為估計。</li> <li>能用計算機的 <math>x^y</math> 功能，探索形如 <math>(1.01)^x = 2</math> 之方程式的近似解。</li> <li>能轉換科學記號數字與 10 的冪次，藉以理解 <math>\log</math> 數值之整數與小數部分的意義，並建立 10 的冪次與對數的數感（亦即不使用計算機而粗略估計 10 的冪次或對數的值）。</li> <li>理解 <math>\log a</math> 的意義就是 <math>10^{\log a} = a</math>，其中 <math>a</math> 為正數。反之，任意正數 <math>a</math> 都可以改寫成 <math>10^{\log a}</math>。能用 <math>\log</math> 符號紀錄或表達數值。</li> </ol>				
<b>教學活動設計</b>				
<b>教學活動內容及實施方式</b>			<b>時間</b>	<b>備註</b>
下列活動皆為分組進行，兩人一組。				
<b>活動一：</b> 觀察計算機計算出極大數或極小數的結果時，請學生猜測螢幕上顯示的符號意義，再介紹科學記號的表示法及其加減乘除的運算。			10 分鐘	
<b>活動二：</b> 教師帶領閱讀科普短文「宇宙的大小」，並將學生分組進行文中引導的摺紙活動，將太陽系中的所有行星相對位置摺在一長條紙上，並作記號，最後，請同學思考要如何驗證其正確性。			40 分鐘	為避免少數學

學習單列出將各行星到太陽之間的距離(以科學記號表示)，學生可以利用計算機進行運算，驗證摺紙出來的結果是否正確。

### 第一節結束

#### 活動三：

小丁負責籌畫社團晚會，為了營造氣氛，他決定購買一些固體乾冰。小丁購買回家之後，發現外包裝有下列警語：

在低濃度時，二氧化碳氣體是無味的，但在較高濃度時會使人感到刺痛甚至窒息。這是因為當吸入濃度比大氣層平常濃度(二氧化碳約占 350ppm)高很多的二氧化碳時，氣體溶解在黏膜和唾液中，產生了碳酸，所以會有酸的味道且鼻子和喉嚨會產生刺痛感。

研究發現，二氧化碳高於 5,000 ppm 的時候，會影響健康，而高於約 50,000 ppm 的濃度(相當於空氣中 5%的體積)被認為是有危險性的。

小丁想：糟糕，我買了這麼多乾冰(10 公斤!)，而晚會場地為密閉空間，那會不會造成危險呢？

我們來幫他想一想：

1. 二氧化碳的分子量為 44，表示一莫耳的  $\text{CO}_2$  重量為 44 公克，一莫耳物質中含有約  $6 \times 10^{23}$  個粒子，廠商將乾冰切成每一小塊為正立方體，邊長為 3cm，又已知乾冰密度為  $1.56\text{g}/\text{cm}^3$ ，請問每一小塊固體乾冰裡，有多少個  $\text{CO}_2$  分子呢？
2. 若不計空氣中原有的  $\text{CO}_2$  的濃度，10 公斤乾冰全部變成二氧化碳氣體，請幫忙計算晚會場地的體積至少要多少立方公尺，才不會影響健康？
3. 再估計一下，這個場地大約是幾個你們的教室大小呢？

#### 活動四：

1. 阿丁在實驗室，發現有一瓶內含 pH 值為 6 的鹽酸 1 公升，他知道純水的 pH 值為 7，所以取 1 公升的一瓶純水(pH 值為 7)，將兩溶液混合在一起，請問混合溶液的 pH 值為多少？

### 第二節結束

30 分鐘

20 分鐘

生對於文中敘述無法理解，教師可以從旁協助。

融入環境議題中的公共安全教育。提醒同學塵爆事件的教訓，在規劃團體活動時應提高警覺，注意安全。

如何估計教室大小，可請師生發揮創意，不拘泥於精確的答案。

應先了解學生是否懂得莫耳濃度計算的方法。

2. 將 pH 值為 6 的鹽酸與 pH 值為 7 的純水，所以取體積分別為 1 公升與 3 公升，將兩溶液混合在一起，請問混合溶液的 pH 值為多少？

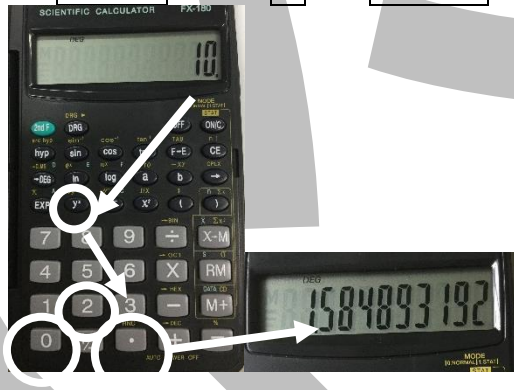
10 分鐘

**活動五：**

利用計算機探索 10 的幾次方是 5.5。

利用  $y^x$  鍵學習輸入計算  $10^{0.2}$

輸入 10 → 按下  $y^x$  鍵 → 輸入 0.2 → 顯示：



25 分鐘

在活動四中，發現無法直接得到 pH 值，所以才進行活動五探討 10 的幾次方會是 5.5。

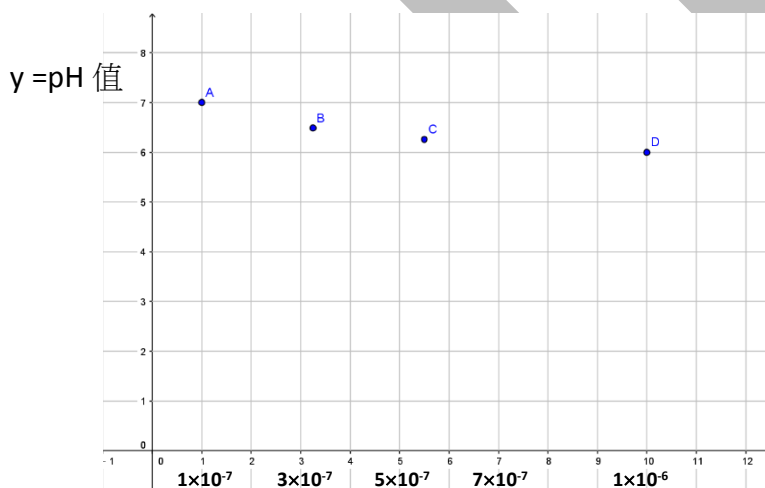
活動完畢，回頭將剛才計算出的濃度都換算出其 pH 值。

由上述計算氫離子濃度與 PH 值得到的結果，我們可以將其中 4 個資料製成一個表格：

[H <sup>+</sup> ]	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-4</sup>	10 <sup>-5</sup>	10 <sup>-6</sup>	5.5×10 <sup>-7</sup>	3.25×10 <sup>-7</sup>	10 <sup>-7</sup>	10 <sup>-8</sup>	10 <sup>-9</sup>
pH	3	4	5	6	6.26	6.49	7	8	9

如果將這些資料，畫在一個橫軸為 [H<sup>+</sup>]，縱軸為 pH 值的坐標軸上，則上面這些資料點是否符合「[H<sup>+</sup>]與 pH 值為線性關係」？

下圖為氫離子濃度與 pH 值的關係圖，可以發現這些點並不在一直線上：



A(1×10<sup>-7</sup>,7)    B(3.25×10<sup>-7</sup>,6.49)    C(5.5×10<sup>-7</sup>, 6.26)    D(10<sup>-6</sup>,6)

活動六：

將一張厚度為 0.1mm ( 公釐 ) 的紙，對摺再對摺，一直對摺多少次之後，它的厚度會超過 1 公里呢？

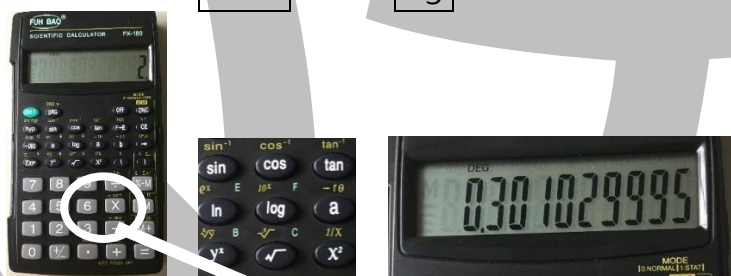
15 分鐘

第三節結束

活動七：

計算機有沒有功能可以直接求出  $x$ ，使得  $10^x=2$ ？

試試看：輸入 2 → 按下 **log** 鍵 → 顯示？



符號  $\log 2=0.3010$  表示甚麼呢？你能再求出  $\log 4$  與  $\log 5.5$  嗎？

15 分鐘

利用計算機，完成下列表格：( 約到小數第四位 )

$x$	$\log x$	$10^{\log x}$
2		
3		
4		
5		
5.5		
7		
8		
9		
10		
20		
21		
38		
520		
1314		
100000		
0.01		
0.0002		

5 分鐘

30 分鐘

有沒有甚麼發現呢？你能解釋為什麼嗎？

原來  $10^{\log x}=x$ ！

網路上有不少關於將紙對摺後厚度的討論與影片，老師也可以稍加補充。

<p>受限於計算機的顯示，我們只能找到 <math>\log x</math> 的近似值，不過，當 <math>x=10^1, 10^2, 10^4, 10^{-3}, \dots</math> 時(為 10 的整數冪次)，它的值就會是整數(也就是這個冪次方的大小)。</p> <p><b>對數的定義：</b><math>a</math> 為實數，若 <math>10^a = x</math>，則 <math>a = \log x</math>。</p> <p>從定義可以知道，因為 <math>10^a</math> 必為正數，因此 <math>\log x</math> 中的 <math>x</math> 必為正數。</p> <p><b>【任務】</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>想一想：<math>\log 200</math> 大約是多少？你怎麼得到這個結果的？</li> <li>想一想：<math>\log 56789</math> 的值，整數部分是多少？你怎麼得到這個結果的？</li> <li>想一想：<math>\log 0.000001 = ?</math></li> </ol> <p style="text-align: center;"><u>第四節結束</u></p>		<p>這裡可以與同學討論一下關於計算機產生誤差的原因。</p>
<p><b>試教成果：</b>(非必要項目)</p>		
<p><b>參考資料：</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>附件宇宙的大小 2013/06/27，作者：Shane L. Larson、翻譯：黃于薇，現為兼職譯者，本文原發表於 <a href="#">Write Science</a>。</li> <li>本教案改寫自「素養導向教學模組—科學記號與 10 的冪次」學生手冊與教師手冊 網址 <a href="http://12cur.naer.edu.tw/category/post/277">http://12cur.naer.edu.tw/category/post/277</a></li> </ol>		
<p><b>附錄：</b></p>		

## 捌、新舊課綱之課程實施銜接分析與建議

十二年國教數學領綱之實施，承續在國中小九年一貫及 103 高中微調課綱的基礎上。十二年國教數學領綱之實施依照不同教育階段逐年實施。因此本章目的提出新舊課程綱要銜接分析與建議，主要針對學生從六年級（使用舊課綱）升上七年級（使用新課綱），以及九年級（使用舊課綱）升上十年級（使用新課綱）時，因為學習內容中知識點的缺漏或新增，以及學習表現的差異所產生的銜接需求，進行分析與銜接建議提供教材編選與教學實施之參考。

「銜接分析」主要包含兩類型：必要性銜接與支持性銜接，針對兩類銜接提供銜接建議。分述如下：（1）必要性銜接：意指七年級、十年級學生學習十二年國教課綱時所缺漏且必要的學習內容中的知識點，針對此類銜接，建議提供學生銜接教材；（2）支持性銜接：意指七年級、十年級學生學習十二年國教課綱時，在學習內容中新增的概念或知識，建議教師教學時可以提供補充的學習資源。此外，針對學習表現的差異，則提供教學實施建議供教師參考。

### 一、新舊課綱之課程實施銜接分析

數學領域課程綱要研修採取「減法原則」，銜接所產生的問題極小，都可以在課堂內調整達到銜接目的，詳細請參見下面分析及建議。

### 二、新舊課綱之課程實施銜接建議

十二年國民基本教育數學領域課程綱要（六升七年級）概念銜接與補充建議表

主題	學習表現 /學習內容	年段		教學實施配套
		十二年國教	九年一貫	
D-6-2 解題：可能性	從統計圖表資料，回答可能性問題。機率前置經驗。「很有可能」、「很不可能」、「A 比 B 可能」。	6 年級新增	無	9 年級於 D-9-2(認識機率)條目之前，於適當時機教授，預計一節課
備註	在九年一貫 9 年級的課程內容有兩圓關係、能理解多邊形內心與外心的意義和相關性、二次函數的配方與其應用問題、百分位數，但在 107 課綱已將這些內容刪除或移至高中(請參見附錄一)，並且將九年一貫 9 年級的課程內容的統計圖表與統計數據調移至 7 年級、統計資料處理調移至 8 年級。雖然新增了直角三角形的三角比(S-9-5)和空間中的線與平面(S-9-13)，估計尚有很充裕的時間調整出一節課作為 D-6-2(解題：可能性)的銜接課程教學。另一方面，在 D-9-2(認識機率)的教學前，先作 D-6-2 的機率前置經驗的學習，更加促進學生對機率學習的效率。			

十二年國民基本教育數學領域課程綱要(九升十年級)概念銜接與補充建議



主題	學習表現 /學習內容	年段		教學實施配套
		十二年國教	九年一貫	
S-7-2 三視圖	立體圖形的前視圖、上視圖、左(右)視圖。立體圖形限制內嵌於 $3 \times 3 \times 3$ 的正方體且不得中空。	7年級新增	無	三視圖加強學生對於空間概念的成熟度，在國中階段已經發展到S-9-13的條目內容。所以高中階段僅作S-9-13的銜接教學。
N-8-6 等比數列	等比數列；給定首項、公比計算等比數列的一般項。	8年級新增	無	10年級於N-10-6講解遞迴數列時融入，預計一節課。
S-9-5 直角三角形的三角比	對直角三角形的一個銳角定義「斜邊」、「鄰邊」、「對邊」，並引入符號 $\tan A$ 、 $\sin A$ 、 $\cos A$ ；直角三角形內，給定一邊的長和一個銳角的角度，決定另一邊的邊長；學生無使用計算機時，角度限於30度、45度、60度。	9年級新增	無	10年級於G-10-6條目之前，於適當時機教授，預計三節課 <sup>①</sup> 。
S-9-13 空間中的線與平面	長方體與正四面體的示意圖，利用長方體與正四面體作為特例，介紹線與線的平行、垂直與歪斜關係，線與平面的垂直與平行關係。	9年級新增	無	10年級於G-10-7條目之前，於適當時機教授，預計一節課 <sup>①</sup> 。
備註	①107課綱在10年級的課程內容有絕對值、科學記號的運算、二次函數配方、百分位數，但九年一貫的國中生已習完這些單元，預估可以省下六節課。			

玖、其他課程規劃建議(待發展· optional)



Q 問題	A 回答
Q1：十二年國教和九年一貫的數學課程理念差異為何？	<p>A1：</p> <p>一、<b>素養培養</b>：十二年國教數學課程理念強調核心素養的培養，為下一代的進階學習與職涯發展做好準備，促成社會的良好運作以及個人人生目標的實現，符合世界主要國家在新一波的數學教育改革的趨勢，這與以往九年一貫課程強調基本能力的開展相當不同，新課程強調培養有能力、有意願進行終身學習的學習者，能解決生活情境中所遇到的問題，並能因應社會與時代變遷而不斷自我精進。</p> <p>二、<b>機會均等</b>：把每一位學生帶上來、適性揚才是十二年國教的重要理念，也是數學教育「公平」理念的實踐，故十二年國教數學教育的重要目標為提供所有學生公平受教、適性揚才的機會，培育其探索數學的信心與正向態度，這與九年一貫的課程目標相當不同。</p> <p>三、<b>層次明確</b>：十二年國教的數學內容安排注重學習的層次性，從直觀的學習開始，逐步進到抽象的層次。以國中幾何主題為例，七年級為「直觀幾何」、八年級為「測量幾何」、九年級為「論證幾何」。同樣的道理，在規畫指數、對數、三角等學習內容時，先從數的觀點出發，之後才切入函數的概念、畫函數圖形、求導函數、函數積分等等。</p>
Q2：學生在數學學習成果落差很大，對於落後學生，有何規劃？	<p>A2：課綱於「實施要點」鼓勵教師於課堂中進行差異化教學，提供所有學生學好數學的機會，並規範對於學習落後的學生，學校及教師應考量其學習方法、學習態度與學習能力，發展補救教學課程。在國中小階段，可運用彈性課程時間及時補救；並於高一上學期，針對會考成績不力的學生，要求各校設計「基礎數學」課程，補足其應有的數學基礎能力。另外，為了達成適性揚才的目標，所以數學領綱在高二規劃了 A、B 兩類課程，並鼓勵各校可發展各類選修課程，為學習落後學生提供學好數學的機會。</p>
Q3：為何十二年國教數學課程要於學習重點引入計算機？	<p>A3：為符合國際教育趨勢，並發展學生能運用計算機進行數學探索與建模以及<b>正確使用計算機的態度</b>，因此於十二年國教數學課程加入計算機的相關內容。由於計算機的計算有一定的誤差，</p>

<p>有何配套措施？</p>	<p>應強調其使用時機及侷限。學生在熟練計算原理後，為避免繁複計算因而降低學習效率，可適當使用計算機，執行複雜數字、統計數據、指數、對數及三角比的計算。實施時機以國、高中階段為宜。教師可在適當時機使用電腦輔助教學。</p> <p>為落實計算機教學，有別於歷年數學課程綱要僅在實施要點內敘明教學可使用計算機，本次學習重點特別在適當條文中，納入教導使用計算機的方法及正確態度。此外，領綱研修團隊建議教育部於大型入學考試中，允許考生使用計算機。</p>
<p>Q4：引入計算機可能造成許多問題(例如：城鄉差距、學生過度依賴等)，其因應方式為何？</p>	<p>A4：提供計算機的規格建議，讓業界、課綱和考試，都有所依循，並諮詢業界意見，確定符合規格的計算機價格是合理的。再者，計算機教學是從七年級開始，小學階段先培養好基本的算術操作能力，了解算則的基本原理，強調計算機使用的<b>正確態度</b>。</p>
<p>Q5：研修過程中，如何確保數學課程一到十二年內容的連貫性？</p>	<p>A5：由於九年一貫課程已確立國中、國小課程內容的連貫，十二年國教課程研修參酌九年一貫課程的課程架構，以確保國中、小課程的連貫性；並於高中課綱研修時，以九年級數學學習內容/表現，當做十年級學生的起點行為，以確保國、高中課程的連貫性。再者，在研修機制中，由召集人運用核心會議，讓國小、國中、高中階段數學領綱副召集人共同討論與確定課程內容的連貫，並經全體委員會議討論與確認課程內容的連貫性。</p>
<p>Q6：時常有其他科目已經用到數學的概念，可是數學教師卻還沒教到，課程銜接不上，如何與其他科目連結？</p>	<p>A6：數學做為其他學科學習的基礎，為確保課程內容能服務其他學科學習的需要，並能與其他學科做統整，課綱研修機制運用領綱研修聯席會議，讓各領綱正、副召集人能彼此討論與交流課綱研修的規畫與內容，期能使各領域的學習重點能夠統整與沒有無謂重複之處。</p>
<p>Q7：數學做為語言與工具學科與其他各學科的課綱協作有何規劃？</p>	<p>A7：數學為科學之母，除了在國中階段介紹三角比與三角符號外，在高一也介紹對數符號，提供基礎科學學科教學使用。另外並提供相關有關按比例成長或衰退的數學模型、地震及週期現象等自然或科學現象教材進行說明。</p> <p>對於社會學科的教學協作，除了既有的機率統計內容外，也針對社會組學生的地理經緯度與經濟學中的連續複利、邊際意涵及金融與理財進行介紹。</p> <p>針對藝術設計等學科包括相關比例等生活情境與平面幾何的</p>

比例設計概念進行教學。

## 第二部分 國民小學教育階段篇

Q 問題	A 回答
Q1：十二年國教國小課綱與九年一貫課綱有哪些差異？	A1：十二年國教領綱研修小組檢視九年一貫課程實施的情況，並對中小學數學教師實施問卷調查以及進行座談會徵詢數學教育專家學者的意見，調整數學學習內容，例如：刪除等量公理、強化模式觀察、強調數學素養之培養。(詳見附件一對照表)
Q2：在第一學習階段，十二年國教比起九年一貫課綱每週多出一堂數學課，請問領綱對於多出了的一節課有何規劃？	A2：相較於九年一貫課程，十二年國教課程在第一學習階段基本上未因節數增加而增加學習內容(除了初步認識單位分數)，目的是讓教師能更從容地教授數學基礎，讓學生有更充裕的時間探索數學概念與學好數學。

## 第三部分 國民中學教育階段篇

Q 問題	A 回答
Q1：國中課綱與九年一貫課綱有哪些差異？	A1：十二年國教領綱在國中階段研修有兩大原則：「連貫性」與「減法原則」。 <b>連貫性</b> ：先進國家的數學課程改革，注重「連貫」、「聚焦」與「嚴謹」，其中以「連貫性」最為重要。為達成課程連貫，本次課綱研修調整相關單元的學習年級。在九年一貫課程的基礎上，考量學生心智成熟階段，調整相關學習內容的順序，進而達成數學素養之培養。(詳見附件二對照表)。 <b>減法原則</b> ：研修小組檢視九年一貫課程實施的情況，並對中小學數學教師實施問卷調查以及進行座談會徵詢數學教育專家學者的意見，調整數學學習內容。例如：兩圓關係、圓的弦切角、二次函數配方等繁雜內容。

<p>Q2：三角比值回到國中教學對學生負擔是否太大？</p>	<p>A2：在國中階段談到的三角課題，主要為直角三角形相似性質的延伸，開啟高中職三角函數學習的序幕。許多國家皆在九年級就教授直角三角比，以英國與芬蘭為例，兩國都是在九年級從比值切入，而且是接在畢氏定理單元之後，在相似三角形單元之前教授。</p> <p>「直角三角比」的內容教授概念，先讓學生認識<b>相似直角三角形邊長比值的不變性</b>與 <math>\sin</math>、<math>\cos</math>、<math>\tan</math> 的符號。並解決簡單的三角測量問題。至於商數關係、平方關係等內容留到高中職教授。</p>
--------------------------------	--

第四部分 普通型高級中學教育階段篇

Q 問題	A 回答
<p>Q1：這次高中二年級的課綱分成 A、B 兩類，與 99 課綱分成甲、乙兩版有何不同？</p>	<p>A1：99 課綱分成甲、乙兩版，而甲版包含乙版，僅有內容多寡的差異。十二年國教數學從高二起分成 A、B 兩類不同課程，提供不同學習需求的學生選修，以達成適性揚才的理想。</p>
<p>Q2：請問不同學習需求的學生該如何選讀 A、B 兩類課程？</p>	<p>A2：學生修習數學，從高二起分為三個軌道。對於高數學需求（例如理工資電傾向）的學生，可以修習數學 A、然後修習數學甲。對於不同面向數學需求（例如商管醫農商管傾向）的學生，可以修習數學 A 或數學 B、然後修習數學甲或數學乙。對於低數學需求（例如文史法藝術傾向）的學生，可以只修習數學 B。</p> <div data-bbox="526 1366 1412 1769" style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 10px; text-align: center;"> <p>高二起數學分為三個軌道的學習路徑圖</p> <pre> graph LR     A[高數學需求] --&gt; B[高二數學 A]     B --&gt; C[高三數學甲]     D[不同面向數學] --&gt; E[高二數學 A]     D --&gt; F[高二數學 B]     E --&gt; C     E --&gt; G[高三數學乙]     F --&gt; G     H[低數學需求] --&gt; I[高二數學 B]     I --&gt; J[高三自行選修或不選]           </pre> </div>
<p>Q3：請問 A、B 兩類課程的差異為何？如何銜接三年級？</p>	<p>A3：大抵而言 A 類課程包含 B 類課程，不過部分 B 類課程的內容係針對不同面向數學需求與低數學需求的學生所設計，而 B 類課程與 A 類課程仍保有相當程度的關聯性，以利高二選讀 B 類的學生於高三時銜接數乙。</p>
<p>Q4：現今普通型高中</p>	<p>A4：為讓綜合高中學生能於高二順利轉銜學術學程或專門學程，數</p>

<p>與技術型高中課綱的內容編排造成綜合型高中學生轉銜有很大的問題，此次課綱研修是否有因應的方式？</p>	<p>學課綱研修團隊納入部分技術型高中課綱研修委員，且領綱研修正、副召集人出席技術型高中數學領綱研修會議，以溝通、交流兩邊的想法，並適時召開普通型高中、技術型高中及綜合型高中課綱研修聯席會議，以協助綜合型高中學生順利轉銜。</p>
<p>Q5：課綱內容結合計算機使用，學校端能否準備充裕的上課器材？</p>	<p>A5：計算機在課綱的內容設定上僅需要一些基本功能，經調查，基本型計算機售價約在兩百元，一般學生應該有能力自行購買使用。對於特別困難的學生，可由主管教育行政機關協助，或請熱心團體及企業贊助。</p>
<p>Q6：課綱內容結合計算機使用，如何與未來考試有所結合，以達課程順利進行？</p>	<p>A6：數學領綱已於「實施要點」敘明全國性測驗評量宜參考國際上類似考試，准許學生攜帶標準型計算機進入考場，用以解題與作答。課綱相關會議也都有邀請大考中心研究員與會，共同研商計算機納入考試的可行性，以期達到學習與考試同步的目的。</p>
<p>Q7：未來高三課程大量開設選修課程，行政端與教學端如何搭配？</p>	<p>A7：建議以 4 至 6 個班為一個班群，共可開設 6 至 9 門課，每位教師可教授 2 至 3 門課。 開課方式建議可採同一年段結合其他科目共同科設選修課程，混班上課。 空間使用須結合專科教室及一般教室。</p>
<p>Q8：許多單元被切割，請問原因為何？</p>	<p>A8：新課綱的理念之一，將較困難單元的學習，第一次先建立以符號表達數量的基本觀念，第二次教學再進入形式運思，也就是<b>抽象概念與公式</b>使用的部分。所以將指對數分在高一與高二、三角函數則分成各年級都有，其中數甲的部分與現行課綱相同。</p>

## 附錄一：十二年國教數學領域課程綱要與九年一貫課程差異對照表

### 一、國民小學學習階段

主題	學習內容	年段				
		新增	分拆	調移	弱化	刪減
數與量 (N)	N-1-4 解題：1 元、5 元、10 元、50 元	一(部分新增)				
	N-2-5 解題：100 元、500 元	二(部分新增)				
	N-4-4 解題：對大數取概數	四(部分新增)				
	(九年一貫)3-n-11 能在具體情境中，初步認識分數，並解決同分母分數的比較與加減問題。		三→ 二、三			
	(九年一貫)3-n-09 能由長度測量的經驗來認識數線，標記整數值與一位小數，並在數線上做大小比較、加、減的操作。		三→ 三、四			
	(九年一貫)4-n-01 能透過位值概念，延伸整數的認識到大數(含「億」、「兆」之位名)，並做位值單位的換算。		四→ 四、五			
	N-4-8 數線與分數、小數			三、四、 五→四		
	N-5-6 整數相除之分數表示			四→五		
	N-5-11 解題：對小數取概數			六→五		
	N-6-5 解題：整數、分數、小數的四則應用問題			五、六→ 六		
	(九年一貫)1-n-06 能做一位數之連加、連減與加減混合計算。			一→二	二	
	(九年一貫)2-n-14 能理解用不同個別單位測量同一長度時，其數值不同，並能說明原因。					二(內容保留)
	(九年一貫)5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。					五(內容保留)



	(九年一貫)6-n-10 能理解正比的意義，並解決生活中的問題。					六
	(九年一貫)6-n-11 能理解常用導出量單位的記法，並解決生活中的問題。					六

### 刪除 97 課綱(分年細目)

- 2-n-14 能理解用不同個別單位測量同一長度時，其數值不同，並能說明原因。(刪除原因：原條目太細，併入長度與一般量的探索活動。)
- 5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。(刪除原因：原條目本為檢查性項目，僅刪除條文，但原條目精神併入其他教學完成。)
- 6-n-10 能理解正比的意義，並解決生活中的問題。(刪除原因：主要是刪除正比的概念，但原來相關比例文一併入比例教學，正比關係之觀察可在 R-6-2 進行，但不急著介紹更多的概念。)
- 6-n-11 能理解常用導出量單位的記法，並解決生活中的問題。(刪除原因：導出量單位較抽象，在學除速度外也缺乏其他理想又必要的範例，故保留在速度中認識即可。)
- 6-a-01 能理解等量公理。(刪除原因：教師和教科書經常進行過多教學，刪除不影響國中教學)

### 新修課綱「假」新增部分(即本已有內容，特分開名列之部分)：

- N-2-3 解題：加減應用問題
- N-3-6 解題：乘除應用問題
- R-4-3 以文字表示數學公式
- N-5-7 分數除以整數
- N-5-9 整數、小數除以整數(商為小數)
- R-6-1 數的計算規律
- R-6-2 數量關係
- R-6-3 數量關係的表示

### 新修課綱新增部分：

- S-3-4 立體形體與展開圖
- R-3-2 數量模式與推理(Ⅰ)
- R-4-4 數量模式與推理(Ⅱ)
- D-6-2 解題：可能性

### 較大移動部分：

1. 分數將小三部分提前至二年級。大致規劃：小二：初步認識單位分數，小三：簡單分數(真分數和假分數)及其運算。

2. 併式教學完全移到四年級。
3. 數線：小三整數·小四分、小數。
4. 整數相除移到五年級。
5. 統計/資料部分·圖表學習名列小四報讀長條圖與折線圖·小五製作長條圖和折線圖·小六圓形圖。

## 二、國民中學學習階段

主題	學習內容	年段				
		新增	強化	調移	弱化	刪減
數與量(N)	N-8-6 等比數列	八				
	計算機的使用(N-7-9、D-7-1、D-7-2、N-8-2、D-8-1、N-9-1、S-9-5、D-9-1、D-9-3)		七、八、九			
	N-9-1 連比			七→九		
	N-8-5 等差數列求和				八	
	A-8-3 多項式的四則運算				八	
	(九年一貫)7-n-05 能認識絕對值·並能利用絕對值比較負數的大小				七	
空間與形狀 (S) 坐標幾何 (G)	S-9-5 直角三角形的三角比	九				
	S-9-13 空間中的線與平面	九				
	S-7-1 簡單圖形與幾何符號			八→七		
	S-7-2 三視圖	七				
	S-7-3 垂直			八→七		
	S-7-4 線對稱的性質			八→七		
	S-7-5 線對稱基本圖形			八→七		
	S-9-6 圓弧長與扇形面積			八→九		
	(九年一貫)圓的弦切角·兩圓的外公切線長與內公切線長					八
	(九年一貫)凸多邊形外角和公式。					八
	(九年一貫)兩圓關係					九
	(九年一貫)9-s-08 能理解多邊形外心的意義和相關性質					九
(九年一貫)9-s-09 能理解多邊形內心的意義和相關性質					九	

代數(A)	無					
函數(F)	F-8-1 一次函數			七→八		
	F-8-2 一次函數的圖形			七→八		
	(九年一貫)二次函數的配方					九
資料與不確定性(D)	D-7-1 統計圖表			九→七		
	D-7-2 統計數據			九→七		
	D-8-1 統計資料處理			九→八		
	(九年一貫)9-d-04 能認識百分位數的概念，並認識第 10、25、50、75、90 百分位數					九

### 三、高級中等學校學習階段

<b>刪除：必修部份（相對於 99 課綱數學 I, II, III, 和 IV-A）</b>						
1	多項式函數的拉格朗日插值法、有理根判定、韋根定理。					
2	複數系、方程式的虛根、代數基本定理。					
3	重複組合。					
4	連加符號 $\Sigma$ 。					
5	三角比與對數值的查表。					
6	線性規劃。					
	<b>A 類必修</b>			<b>B 類必修</b>		
7	二次曲線。			7	三角的和差公式。	
				8	三角不等式、柯西不等式。	
				9	線性變換、轉移方陣。	
				10	空間概念之三垂線定理。	
				11	空間中的直線、平面方程式。	
				12	三元一次聯立方程式、三階行列式。	
<b>刪除：選修部份（相對於 99 課綱數學 IV-B+選修數學甲、選修數學乙）</b>						
1	抽樣與統計推論。					
	<b>選修甲</b>			<b>選修乙</b>		
				2	一般三角函數的性質與圖形。	
				3	數列及其極限。	
<b>弱化</b>						
1	含絕對值的一次方程式、絕對值不等式。					
2	排列組合：教學目標設定在得到古典機率所需的計數範圍，以及二項式展開。					

3	三角測量：不另立單元，並且以長方體為主要模型。		
4	一般底的對數。		
5	平面向量的幾何表示（不在坐標平面上的平面向量）。		
6	三元一次聯立方程式的三平面關係。		
	<b>A 類必修+選修乙</b>		<b>B 類必修</b>
7	複數系、方程式的虛根。		7 三角恆等式。
			8 (認識) 圓錐曲線。
<b>搬移</b>			
1	複數系、方程式的虛根：10 → 12 年級選修（甲、乙有所區隔）。		
2	勘根定理：10 年級 → 選修數學甲（在 10 年級以「十進制小數的估計」呈現）。		
3	有理數指數與常用對數，在 10 年級先以記號的形式出現。		
4	指數與對數函數：10 → 11 年級（A、B 類有所區隔）。		
5	連加符號 $\Sigma$ ：10 → 12 年級（選修甲、選修乙）。		
6	條件機率與貝氏定理：10 → 11 年級。		
7	極坐標、廣義角：11 → 10 年級。		
8	直線方程式、圓方程式：11 → 10 年級。		
9	廣義角的三角比（正弦定理、餘弦定理）：11 → 10 年級。		
10	線性規劃：11 年級 → 選修數學乙。		
11	二次曲線：11 年級 → 選修數學甲。		
12	弧度量、三角函數：12 年級選修甲、乙 → 11 年級（A、B 類有所區隔）。		
13	正餘弦函數的疊合：12 年級選修甲 → 11 年級 A 類。		
<b>新增</b>			
1	計算機融入教學，附帶科學記號數字與有效數字。		
2	二次、三次函數的局部圖形近似於一條直線。		
3	(數據分布) 百分位數。		
4	(10 年級古典機率) 期望值。		
5	主觀機率和客觀機率的觀念。		
	<b>A 類必修</b>		<b>B 類必修</b>
			6 認識球面上的經線與緯線。
			7 連續複利與 $e$ 的認識。
			8 列聯表與文氏圖的關聯。
	<b>選修甲</b>		<b>選修乙</b>
6	幾何分布。		6 多項式函數的微分及其應用。

	7	認識指對數函數的標準底 $e$ 。	7	多項式函數的積分及其應用。
	8	牛頓求根法。		
	9	認識含 $xy$ 項的二元二次方程式的圖形。		

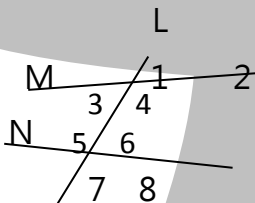
## 附錄二：數學名詞解釋（暫放九年一貫資料參考）

數與量	
等號	兩運算式(數)之值相等，可以‘=’記之，唸為【等於】，如 $4+3=7$ 。
大於、小於	甲大於4，可以記為 $甲>4$ ，或 $4<甲$ ，前者唸為甲大於4，後者唸為4小於甲。
大於等於、小於等於	甲大於4或者可能等於4，可記為 $甲\geq 4$ ，和甲不小於4同義。也可記為 $4\leq 甲$ ，即為4小於或等於甲。
加	$4+3=7$ ，4為被加數，3為加數，7為和。
減	$4-3=1$ ，4為被減數，3為減數，1為差。
乘	$4\times 3=12$ ，4為被乘數，3為乘數，12為積。
除	$14\div 4=3\dots 2$ ，14為被除數，4為除數，3為商，2為餘數。當餘數為0時，稱為整除，如 $12\div 4=3$ 。
自然數	自然數1、2、3...為人類用來數物的數，可稱為計物數，又稱正整數。
整數	正整數、0和負整數合稱為整數。
偶數	個位數為0、2、4、6、8的整數稱為偶數，又稱雙數。
奇數	個位數為1、3、5、7、9的整數稱為奇數，又稱單數。
絕對值	若 $a\geq 0$ ，則定義 $ a =a$ ，唸為a的絕對值等於a，如 $ 7 =7$ ；若 $a<0$ ，則定義 $ a =-a$ ，如 $ -7 =-(-7)=7$ 。
分數	能化為 $\frac{q}{p}$ 的型態，且p、q皆為整數者其中 $p\neq 0$ ，稱為分數；p稱為分母，q稱為分子；若 $0<q<p$ 時， $\frac{q}{p}$ 稱為真分數；否則， $\frac{q}{p}$ 稱為假分數；形如 $2\frac{1}{3}$ 的分數，則稱為帶分數。
最簡分數	一分數經化簡後(合併符號、約分)，若分子與分母的絕對值互質，此分數稱為最簡分數。
等值分數	一分數分子、分母同乘一整數，所得的分數稱為原分數的擴分；一分數分子、分母同除一公因數，所得的分數稱為原分數之約分；一分數擴分或約分後所得的分數，其值和原分數相同，稱為等值分數。
因數、倍數	一正整數a若能整除另一正整數b，a稱為b的因數，b稱為a的倍數。
公因數、最大公因數	一正整數a同為兩個以上正整數的因數時，則a為這些數的公因數。在所有公因數中最大者稱為最大公因數。
公倍數、最小公倍數	一正整數a同為兩個以上正整數的倍數時，則a稱為這些數的公倍數。在所有公倍數中最小者稱為最小公倍數。
質數	一大於1的正整數只有1及本身兩個因數時，稱為質數。
合數	又稱合成數，大於1的正整數中不是質數者稱之。

互質	兩正整數若除了 1 以外無其他公因數，則稱此兩數互質。
質因數	某數的因數如果也是質數，稱為該數的質因數。
短除法	<p>判別一數或一數以上的因數時只寫出除數和商，並不詳細運算除法過程，如</p> $\begin{array}{r} 2 \overline{) 12} \\ \underline{2} \phantom{0} \\ 2 \phantom{0} \\ \underline{2} \phantom{0} \\ 3 \phantom{0} \end{array}$ <p>其計算型態為短除法。若除數皆為質數，其過程即稱為質因數分解。</p>
平方	一數自乘兩次，稱為平方。如 $5 \times 5 = 25$ ，25 稱為 5 的平方。
平方根	$a^2 = b$ ， $b \geq 0$ ，則 $a$ 為 $b$ 的平方根(二次方根)，如 $2^2 = 4$ ， $(-2)^2 = 4$ ，2、-2 皆為 4 的平方根，其中 2 為正平方根，-2 為負平方根，合記為 $\pm\sqrt{b}$ 。
四捨五入	概數(近似值)的取法之一。若一數指定位數之下一位值小於 5，則將指定位數之下的數皆記為 0(捨去)；若大於等於 5，則在該指定位數加 1，並將以下所有數皆記為 0(進入)，稱為四捨五入。例如：325587 在千位四捨五入得 326000；3.1416 在百分位四捨五入得 3.14。
十分逼近法	為估計一數值(如 $\sqrt{7}$ )，先找出此數值位於那兩連續的整數之間，並視實際需要，可在兩數的十等分點再找出連續的兩點做逼近估計，依此類推當可求出我們所想知道此數的近似值。
比	兩數量以「：」區隔並據以呈現兩量之大小關係稱為比，如：兩人體重比為 56：43，披薩個數與價錢之比為 2：600。
比值	由比的相等關係，導引出比之前項除以後項，其值不變，稱為比值，如 3:4 的比值為 $\frac{3}{4}$ 或 0.75。
百分率	將一純小數乘上 100 後附加%記號，稱為百分率，如 $0.23 = 23\%$ 。
正比	兩變量 $x$ 及 $y$ ，若可寫成關係式 $y = kx$ ， $k$ 為常數(一固定數)，則稱 $x$ 、 $y$ 成正比。
反比	兩非 0 變量 $x$ 及 $y$ ，若可寫成關係式 $xy = k$ ， $k$ 為非 0 常數，則稱 $x$ 、 $y$ 成反比。
等差數列	一數列任意相鄰兩項的差(後項減前項)皆相等，稱為等差數列，其差稱為公差，第一項稱為首項，最後一項稱為末項。
等差中項	若三數成一等差數列，中間項稱為等差中項。
等差級數	將等差數列每一項以加號連接求和，稱為等差級數。
<b>幾何</b>	
角	共同端點的兩射線所成的角。
銳角	角度小於 90 度的角稱為銳角。

鈍角	角度大於 90 度的角稱為鈍角。
直角	角度等於 90 度的角稱為直角。
平角	180 度的角稱為平角。
周角	360 度的角稱為周角。
順時針、 逆時針	順著時針轉動方向移動稱為順時針，反之稱為逆時針。
互補	兩角度數和為 180 度。
互餘	兩角度數和為 90 度。
對頂角	兩直線相交而成不相鄰的兩角。兩對頂角相等。
銳角三角形	三個內角皆為銳角的三角形。
鈍角三角形	有一個內角為鈍角的三角形。
直角三角形	有一個內角為直角的三角形。
等腰三角形	有兩邊相等的三角形。此相等的兩邊稱為腰。
頂角、底角	等腰三角形兩腰的夾角稱為頂角，另外兩角稱為底角。若頂角為直角則稱為等腰直角三角形。
畢氏定理	直角三角形斜邊平方等於兩股平方和，又稱商高定理或勾股定理。
平行四邊形	兩雙對邊互相平行的四邊形。
菱形	四邊等長的四邊形。
箏形	有兩組鄰邊相等的四邊形。
梯形	只有一組對邊(稱為上底與下底)平行的四邊形。非上底與下底的兩邊，稱為梯形的腰。
等腰梯形	兩腰等長的梯形。
矩形(長方形)	四個角均為直角的四邊形。
正方形	四個角均為直角且四邊等長的四邊形。
多邊形對角線	多邊形內一頂點和一不相鄰頂點的連線段。
多邊形內角	多邊形內由一頂點和兩夾邊所連成的角。
多邊形外角	若一內角小於 180 度時，由此角一邊向頂點外側所做的角。若一內角大於 180 度時，不定義外角。
垂直	兩直線交角 90 度稱兩直線互相垂直。
垂足	兩垂直線的交點。
平行	平面上兩直線沒有交點，稱此兩直線互相平行。
周長	一圖形周界之長度。
尺規作圖	利用直尺(沒有刻度)、圓規繪製幾何圖形稱為尺規作圖。



中點	線段上一點到兩端點等距離，稱該點為此線段的中點。
垂直平分線	過一線段中點且垂直的線稱為此線段的垂直平分線，又稱為中垂線。
角平分線	將一角分成兩相等角的線稱為角平分線，又稱分角線。
全等	兩圖形可完全疊合，稱兩圖形全等。相對應之點、邊、角稱為對應點、對應邊、對應角。
對稱軸	若兩圖形或一圖形對一直線對稱，則此直線稱為對稱軸，相對應之點、邊、角，則稱為對稱點、對稱邊、對稱角。
截線	在同一平面上，直線 L 分別與直線 M、N 相交於不同兩點，L 叫做 M 與 N 的截線。 
同位角	上圖中， $\angle 1$ 和 $\angle 5$ ， $\angle 2$ 和 $\angle 6$ ， $\angle 3$ 和 $\angle 7$ ， $\angle 4$ 和 $\angle 8$ 分別稱為同位角。
同側內角	上圖中， $\angle 3$ 和 $\angle 5$ ， $\angle 4$ 和 $\angle 6$ 分別稱為同側內角。
內錯角	上圖中， $\angle 3$ 和 $\angle 6$ ， $\angle 4$ 和 $\angle 5$ 分別稱為內錯角。
比例線段	當四個線段中，兩個線段的比等於另兩個線段的比時，此四個線段稱為比例線段。
相似	一圖形經縮放後與另一圖形全等，則稱此兩圖形相似。
三角形中線	三角形一頂點和對邊中點的相連線段。
切線	平面上一直線和一圓只有一個交點稱此線為圓的一條切線。
圓	平面上和一固定點等距離的所有點形成的圖形稱為圓。 此「固定點」稱為圓心；此「距離」稱為半徑；此「圖形」稱為圓周；圓周上兩點最長的距離稱為直徑。
弦	圓周上任兩相異點的相連線段。
弦心距	圓心到弦的距離。
公切線	同時和兩圓相切的直線。
圓周率	圓周長與直徑之比值成為圓周率，常用的近似值為 3.14。
(圓)弧	圓周的一段。
弓形	由一弦和一弧所圍的圖形。
扇形	圓的兩半徑和一弧所圍成的圖形。
圓心角	以圓心為頂點兩半徑為邊所組成的角。
圓周角	圓上一點和通過此點的兩弦所形成的角。
弦切角	由過圓上同一點的弦和切線所夾的角。

外接圓	過一多邊形所有頂點的圓，稱此圓為多邊形的外接圓。
內切圓	多邊形內部中，與各邊相切的圓，稱為多邊形的內切圓。
外心	若一多邊形有外接圓，則外接圓的圓心稱為此多邊形的外心。外心為各邊垂直平分線的交點。
內心	若一多邊形有內切圓，則內切圓的圓心稱為此多邊形的內心。內心為各角平分線的交點。
三角形重心	三角形三條中線的交點。
正四面體	四面均為正三角形的四面體，亦稱正三角錐。
正方體	六面均為正方形的正四角柱體。
長方體	六面均為方形的正四角柱體。
直圓柱	上下底為兩等圓的直柱體。
直圓錐	由一扇形和圓組合而成的圖形。
表面積	一立體圖形的所有面的面積總和。
側面積	一直柱體的表面積，扣除上下兩底面積稱為直柱體的側面積。一直錐體的表面積，扣除底面積稱為直錐體的側面積。
<b>代數</b>	
等量公理	當等號左右兩邊相等時，於等號兩邊各加、減、乘或除以同一個數(不可同時除以 0)，等號兩邊仍會維持相等。
移項規則	在等式中，將一個數或未知數從等號的一邊移到另一邊應遵守：(1)加換成減；(2)減換成加；(3)乘換成除；(4)移換成乘等規則。 不等式的移項規則原則上相同，不過將「負」的乘數或除數，移至另一邊時，不等號必須轉向，例：若 $-3x < 6$ ，則 $x > 6 \div (-3)$ ，即 $x > -2$ 。
函數	在 A、B 兩組資料中，如果給定 A 組的一個資料，就能決定 B 組的一個資料，就稱 B 是 A 的一個函數。
線型函數	函數圖形為直線的函數，稱為線型函數，包括常數函數和一次函數。
多項式	由數和文字符號進行加法和乘法運算所構成的算式，稱為多項式。 例： $3x, x+4, \frac{1}{6}x-5, x^2+1, \dots$ 。
係數	多項式中，變數以外的部分連同其前面的加減符號合稱為係數。 例： $x^2-3x+4$ ，二次項的係數為 1，一次項的係數為 -3，零次(常數)項的係數為 4。
常數項	多項式中，不含變數的項稱為多項式的常數項。
多項式的次數	多項式中，係數不為 0 的最高次項的次數稱為多項式的次數。
一元一次式	$ax+b$ ，其中 $a, b$ 為常數， $a \neq 0$ 。

二元一次式	$ax+by+c$ ，其中 $a, b, c$ 為常數，同時 $a, b$ 不能同時為 0。
一元二次式	$ax^2+bx+c$ ，其中 $a, b, c$ 為常數， $a \neq 0$ 。
分離係數法	兩多項式的四則運算中，只寫出各項係數，待運算結束後，再將結果以多項式的形式呈現。
解	滿足方程式或不等式的數，稱為解。
判別式	一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的判別式，常以 $D=b^2-4ac$ 代表，依判別式的數值為正或負或零可以判斷根的性質。
<b>統計與機率</b>	
次數	各筆或各組資料出現或發生的「次數」、「人數」等。
相對次數	各筆或各組資料出現或發生的次數除以全部次數的總和。
累積次數	有序資料中依出現或發生的秩序(如：由小至大)累加至各筆或各組的次數。
相對累積次數	有序資料中依出現或發生的秩序(如：由小至大)累加至各筆或各組的相對次數。
平均數	所有資料的總和除以總次數，即所有資料的平均值。
中位數	第 50 百分位數，通常表示比這筆或這組數大和比這筆或這組數小的資料各佔一半。
眾數	出現次數最高的一個或一組數。
四分位數	第 25、50、75 百分位數也分別被稱為第 1、第 2、第 3 四分位數，第 2 四分位數又常被稱為中位數。
百分位數	各筆或各組資料的相對位置，表示有百分之多少的資料比該筆或該組資料的數要小。
全距	資料中最大數與最小數的差。
四分位距	第 3 四分位數與第 1 四分位數的差。
機率	一個事件會發生的機會；機率常以百分率或分數來表示。
長條圖	以長條狀圖形高度或長度代表資料量的統計圖形，又稱 bar chart，其中各長條間並不相連接。
折線圖	以直線連接相鄰兩資料點的圖形。
圓形圖	以圓內各扇形面積代表資料統計量的圖形，又稱 pie chart。
直方圖	以長條狀圖形高度代表資料量的統計圖形，又稱 histogram，其中各相鄰長條間彼此相連接。
盒狀圖	以盒狀圖形表現最大數、最小數、第 1、第 2、第 3 四分位數位置的圖形，又稱 box chart 其中中間方盒的資料約佔 50%。